

# $\Delta\Sigma$ AD変調器(1)

傘 昊

群馬大学大学院 工学研究科  
電気電子工学専攻

# $\Delta\Sigma$ AD変調器

## AD変換の基礎

サンプリング, 分解能, 量子化とADCのSNR

## $\Delta\Sigma$ ADCの導入

オーバーサンプリング, ノイズシェーピング

## $\Delta\Sigma$ AD変調器の原理と構成

1次 $\Delta\Sigma$ AD変調器, 2次 $\Delta\Sigma$ AD変調器

## $\Delta\Sigma$ AD変調器の高精度化手法

フルフィードフォワード $\Delta\Sigma$ AD変調器

高次 $\Delta\Sigma$ AD変調器

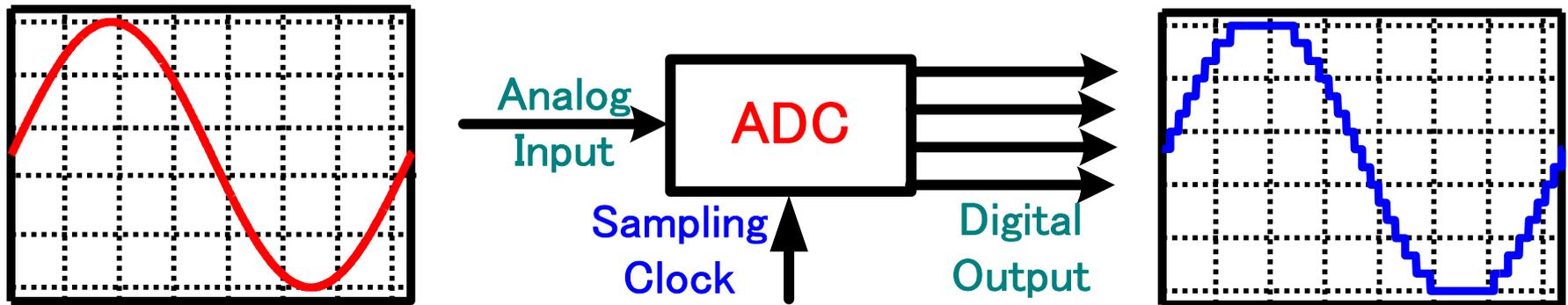
ルチビット $\Delta\Sigma$ AD変調器

# AD変換の基礎



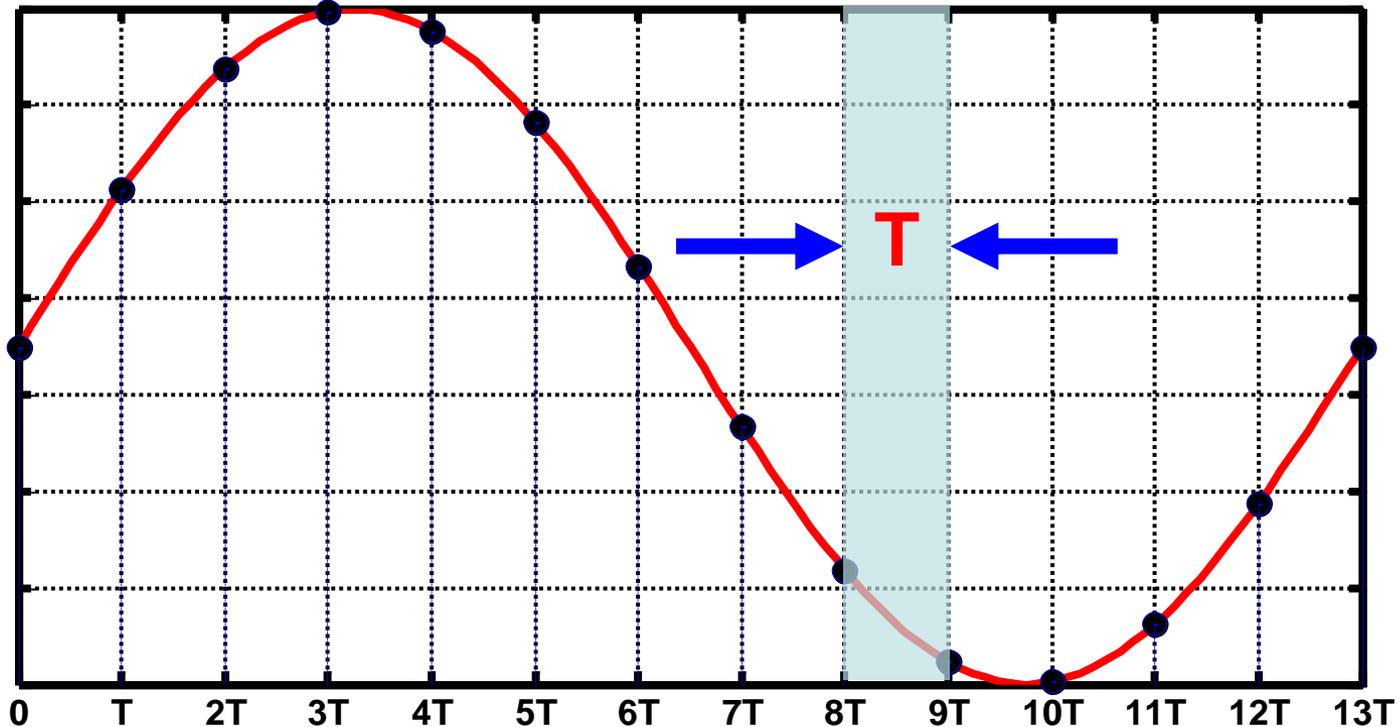
# AD変換

- アナログ信号(電波、音声、電圧、電流等)をデジタル信号 (0,1,1,0,...) に変換する



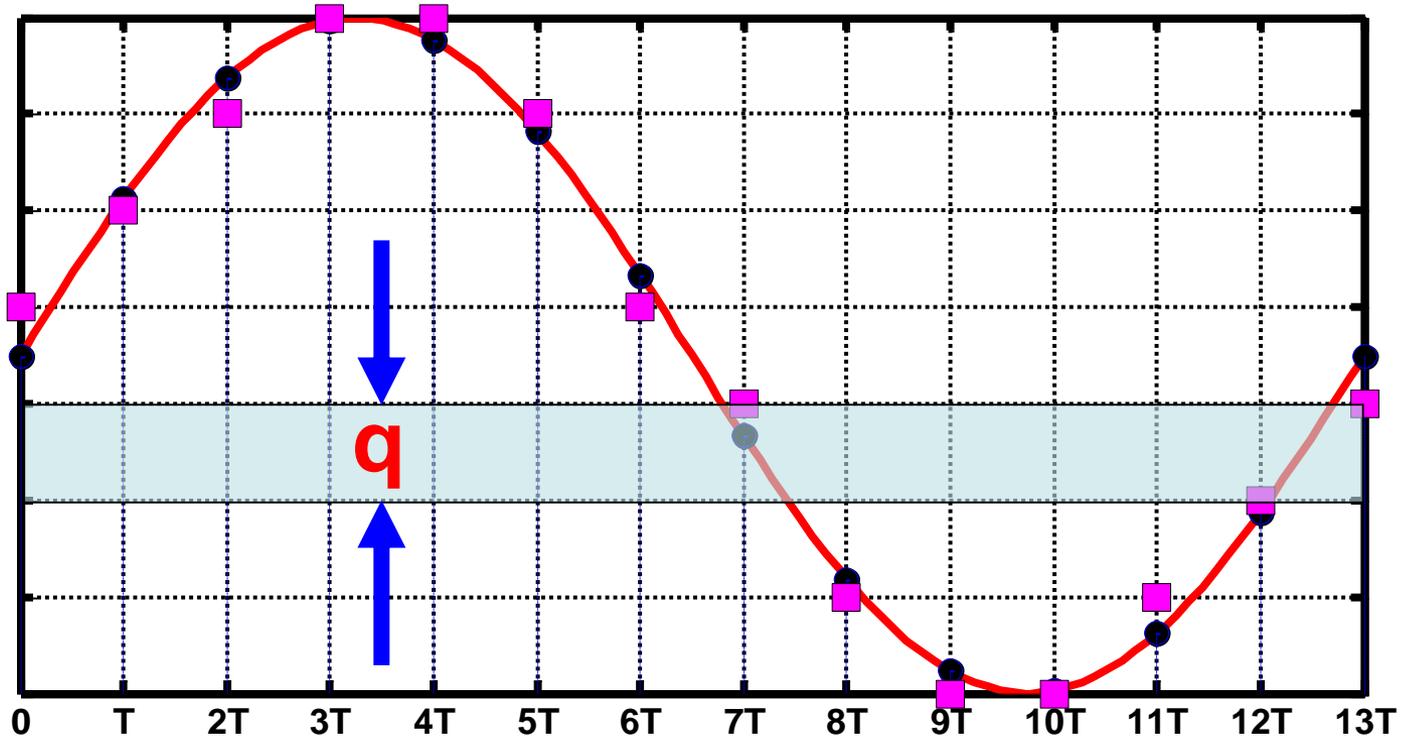
- 連続信号 → 離散信号  
⇒ デジタル信号処理が可能

# 標本化(サンプリング)



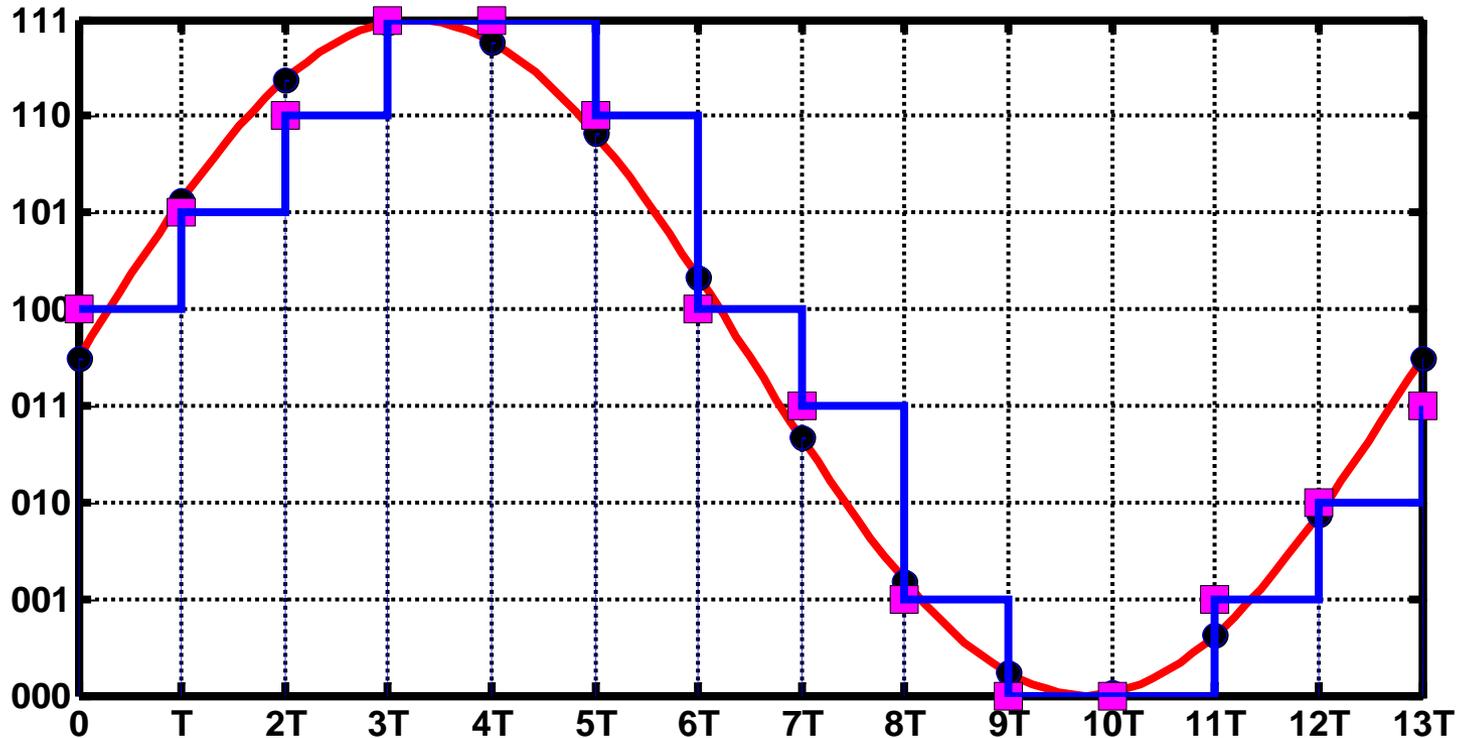
- 連続信号の振幅を一定の時間間隔(周期 $T$ )で切出す
- 時間離散的な瞬間値(データ)に置き換える
- 時間軸の離散化

# 量子化



- 標本化された振幅を単位振幅( $q$ )の整数倍にする
- 振幅データを四捨五入で当てはめる
- 振幅軸の離散化

# コード化



- 量子化された振幅を「0」、「1」に符号化
- デジタル信号を出力

# デジタルによるアナログの表現

## 3ビットによるアナログ量の表現例

デジタル列 ( $2^2$ $2^1$ $2^0$ )			アナログ
1	1	1	7
1	1	0	6
1	0	1	5
1	0	0	4
0	1	1	3
0	1	0	2
0	0	1	1
0	0	0	0

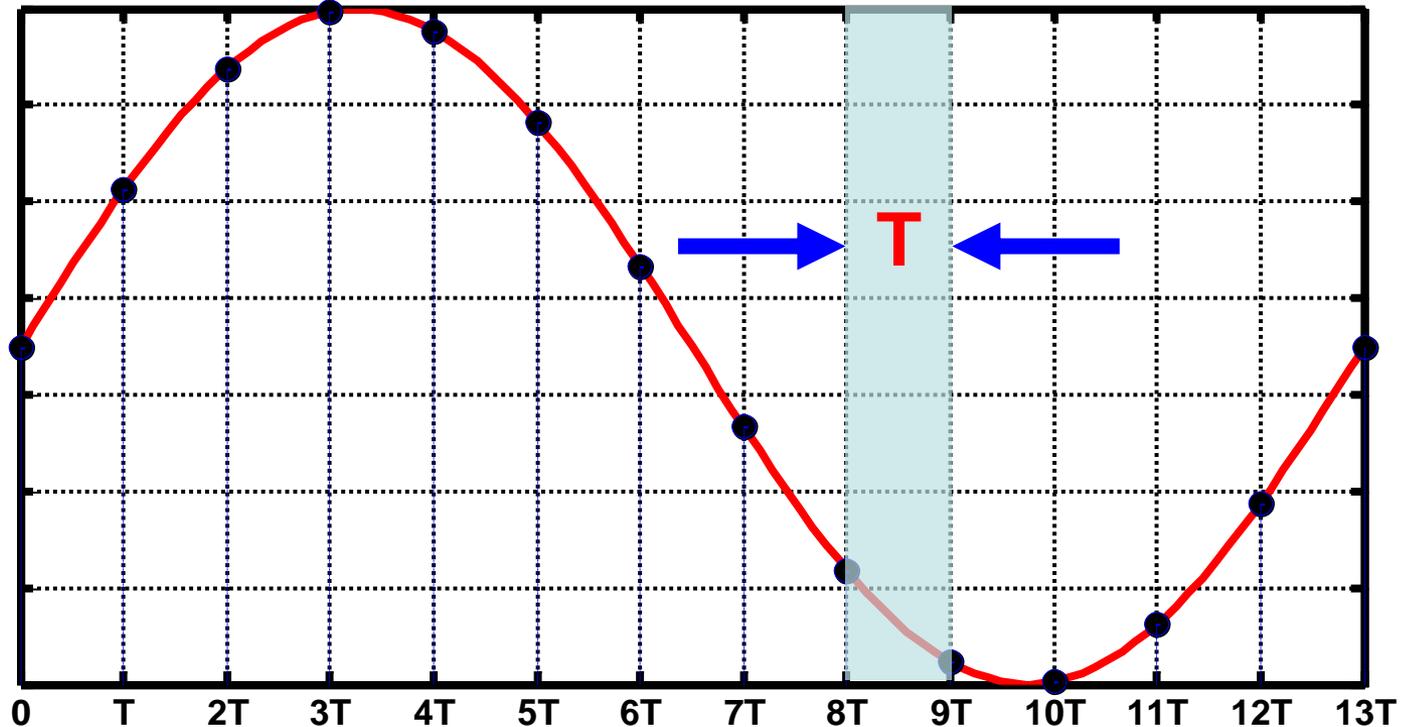
$$1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 5$$

### 多ビットの例

デジタル列	アナログ値
3ビット⇒	8レベル
4ビット⇒	16レベル
8ビット⇒	256レベル
10ビット⇒	1024レベル
16ビット⇒	65536レベル

# サンプリングおよびサンプリング定理

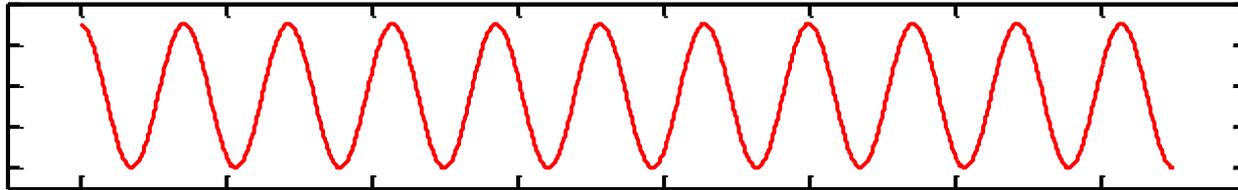
# サンプリング周波数



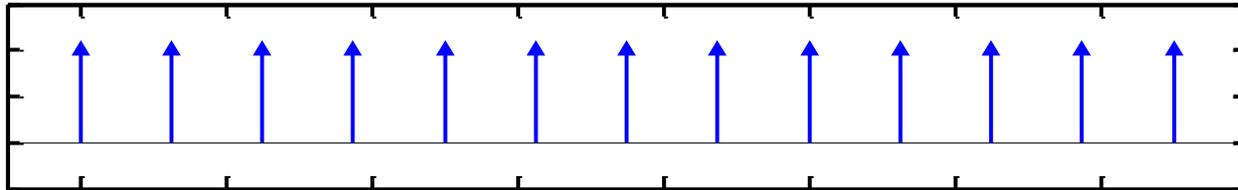
- サンプリング周波数 :  $F_s = 1/T$   
⇒ AD変換速度 (SPS : Sampling Per Second, Hz)

# サンプリング周波数とエイリアシング

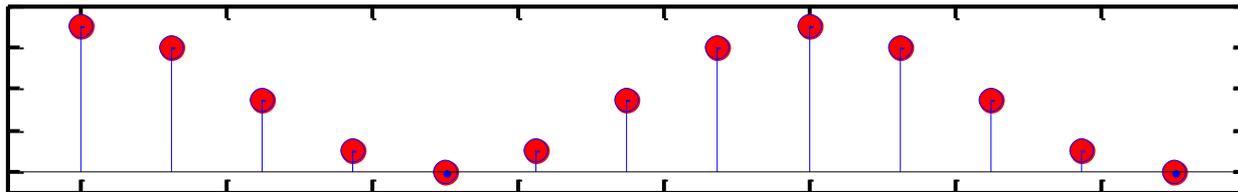
入力信号



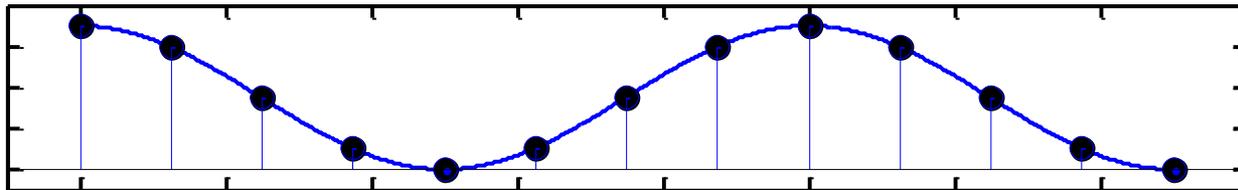
$F_{in}$ と $F_s$   
が近い

サンプリング  
信号

離散信号



再生信号

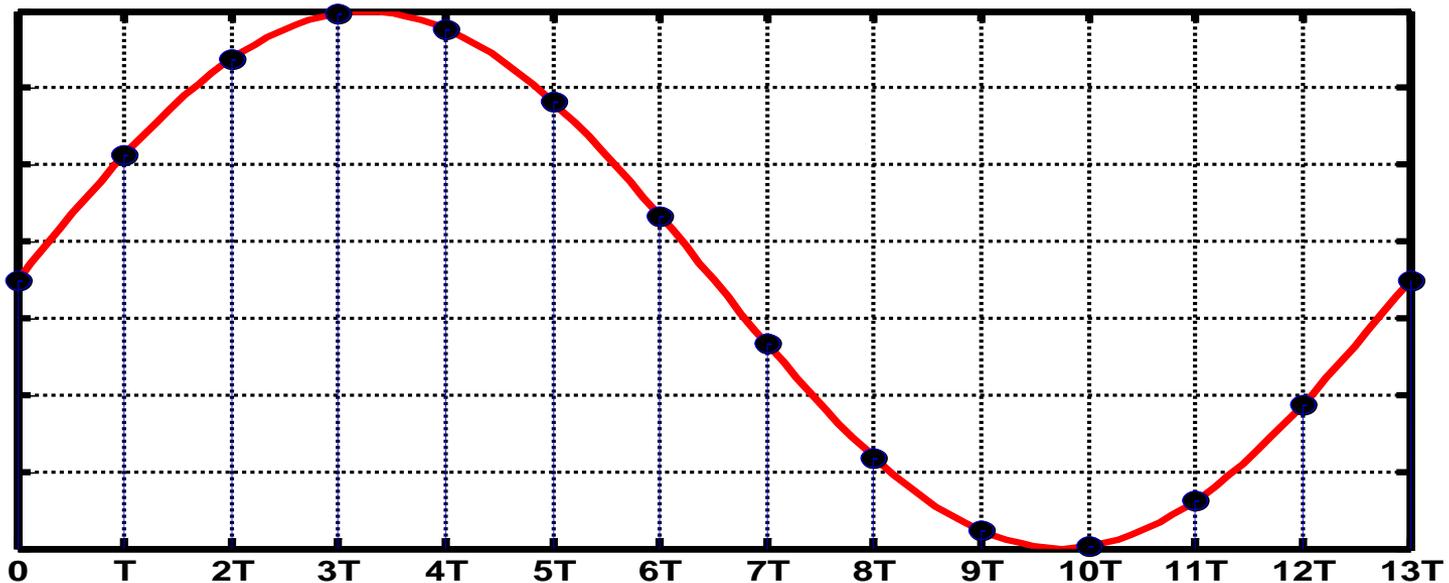


異なる信号  
が再現される

エイリアシング: Aliasing (折り返し)

# サンプリング定理

ナイキスト定理、ナイキスト・シャノンの定理

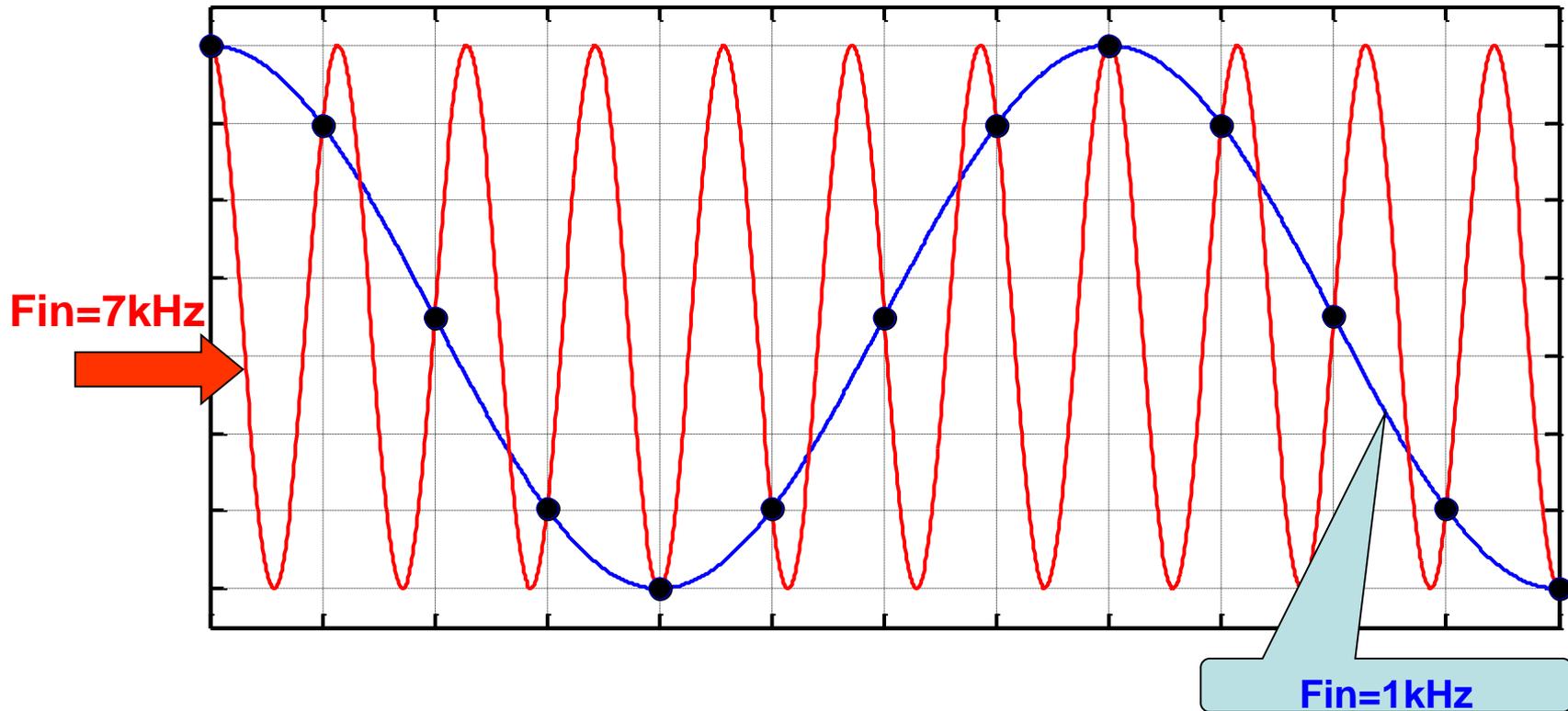


- エイリアシングを防ぐため:

**$F_s > 2F_{in}$** が必要

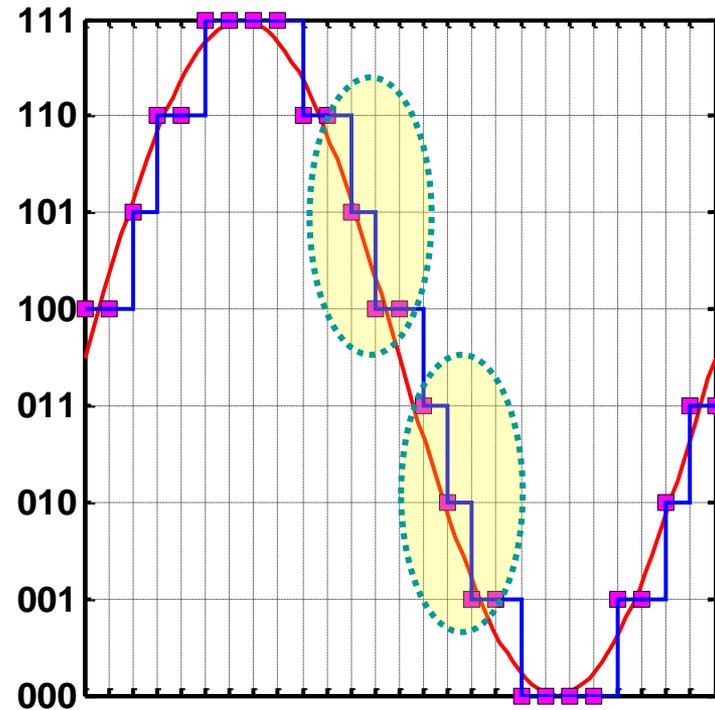
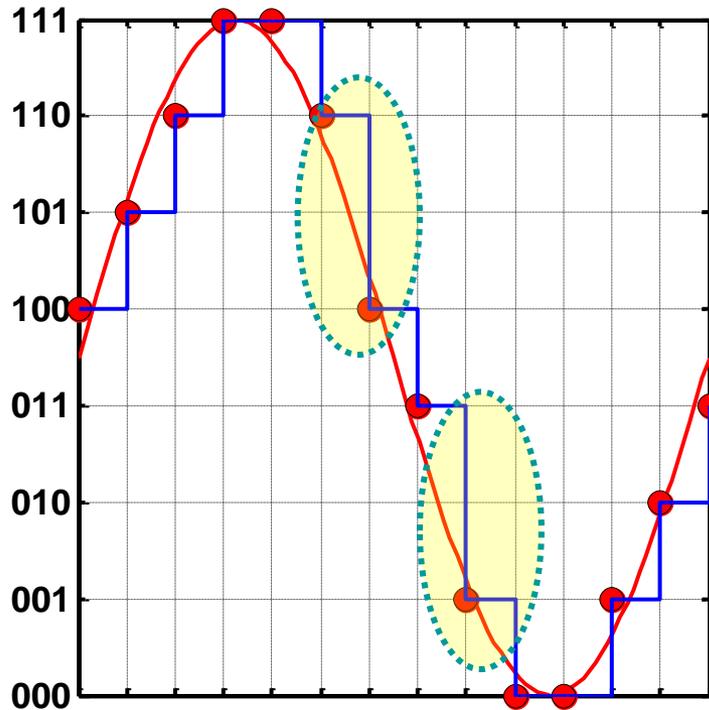
- $F_s > 2F_{in}$** : デジタル信号からアナログ信号が復元できる
- ナイキスト周波数(Nyquist Frequency):  $F_n = F_s/2$

# エイリアシング(Aliasing)



- $F_s=8\text{KHz}$ の時、 $1\text{KHz}$ と $7\text{KHz}$ の信号は区別できない
- ナイキスト周波数以上の入力信号を含むと、異なる連続信号がサンプリングでは区別できない

# オーバーサンプリング

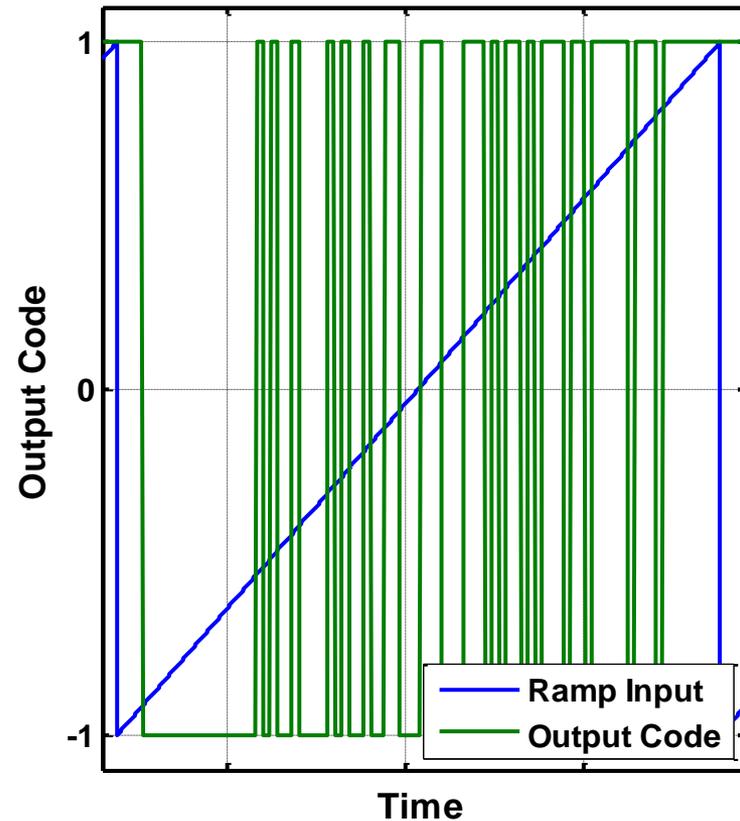
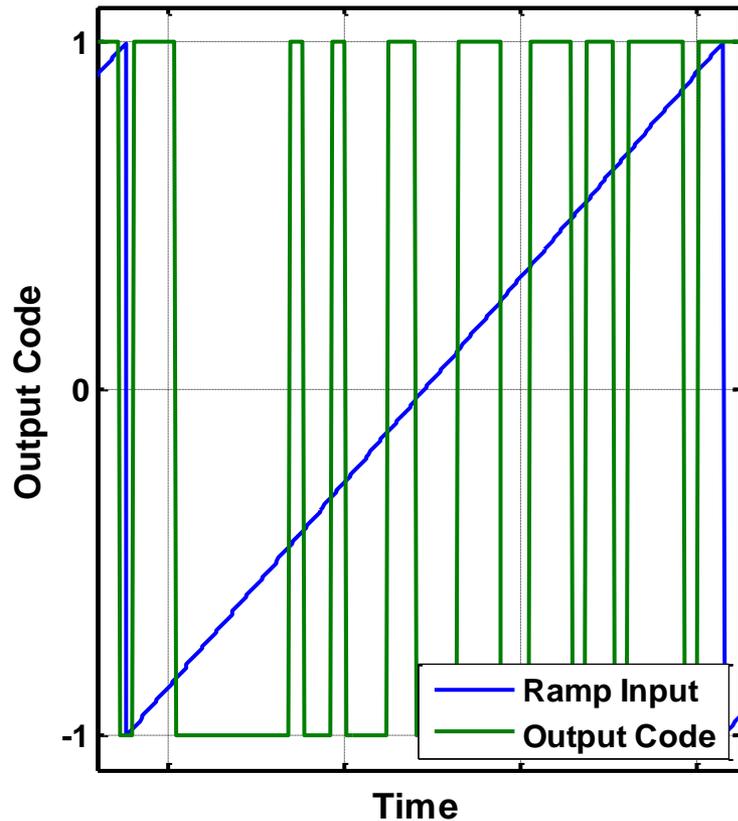


- ナイキスト周波数を超える周波数でサンプリングを行う

$$F_s \gg 2F_{in}$$

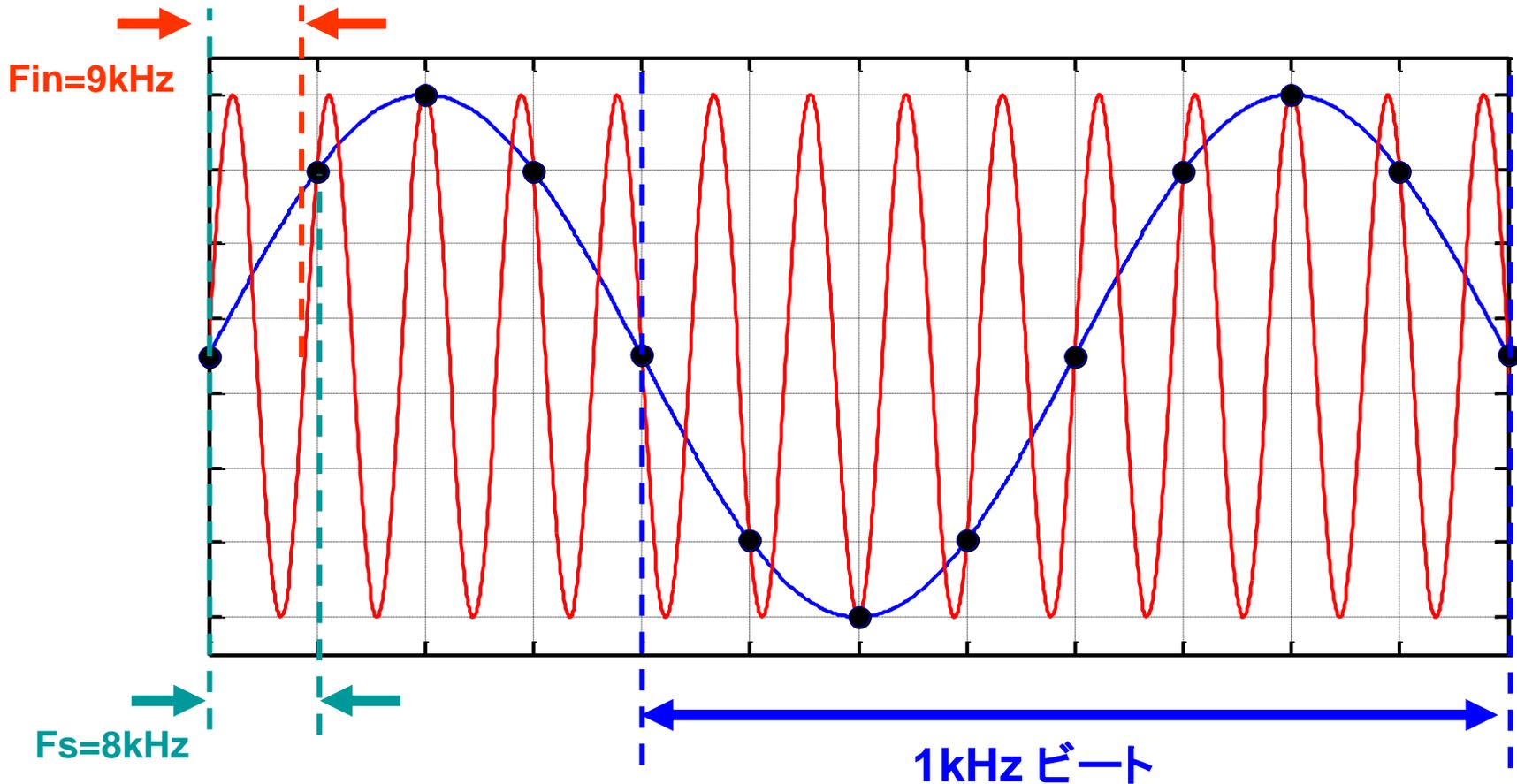
- $F_s$ が大きいほど、AD変換の誤差が小さくなる

# オーバーサンプリング



- オーバーサンプリングを行うとAD変換の精度が向上

# アンダーサンプリング



- ナイキスト周波数以下の周波数でサンプリングを行う:  $F_s < F_{in}$
- サンプリング定理から、エイリアシングが起こるが、高周波搬送波の検波、通信用広帯域信号の交換に用いられる

# サンプリング方法のまとめ

オーバーサンプリング

$$F_{in} < F_{nyquist}/2 = F_s/4$$

オーバーサンプリングADC  
 $\Delta\Sigma$ ADC

音声・通信ベースバンド帯  
AD変換

ナイキスト・サンプリング

$$F_{in} < F_{nyquist} = F_s/2$$

ナイキストADC  
Flash型, SAR型  
Pipeline型

汎用AD変換

アンダー・サンプリング

$$F_{in} > F_s$$

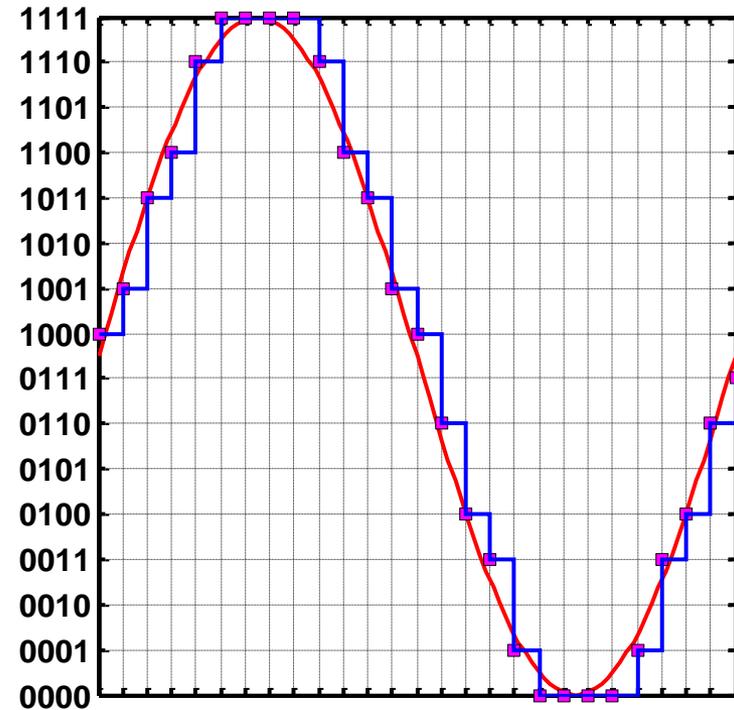
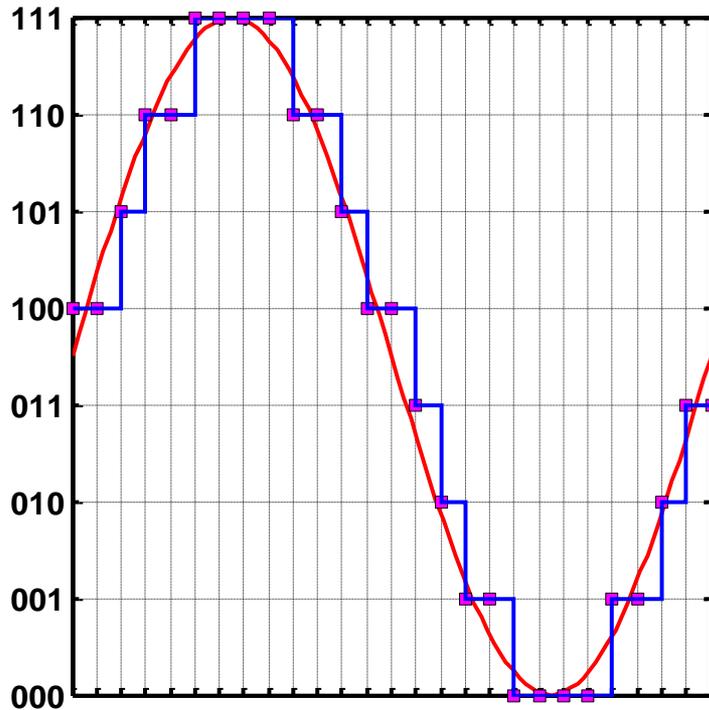
Pipeline型ADC

通信IF/RF帯の広帯域  
AD変換

# AD変換の分解能

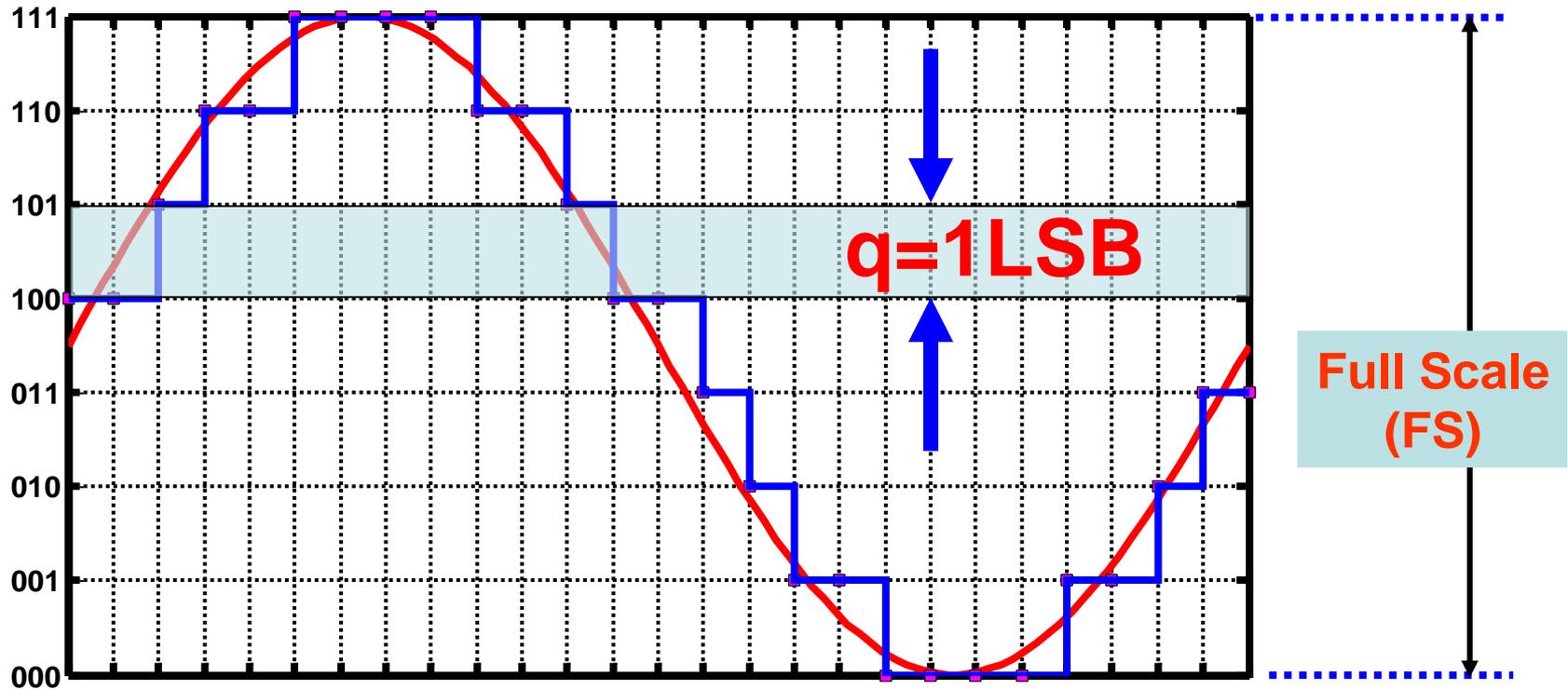
# 分解能(Resolution)

単位: bit



- 分解能とは、一回AD変換で出力できるbit数(N)
  - 量子化のための器基準値の数  $2^N$
- ⇒AD変換の精度

# 最小分解能



- AD変換で区別できる最小振幅の値(量子化の刻み)
- $1\text{LSB} = \text{FS} / 2^N$  (N: bit数)

# ADCの重要仕様

- 変換速度: サンプリング・レート(SPS)
- 分解能: bit数
- FOM: (Figure of Merit)

$$\text{FOM} = \frac{\text{Power}}{(2 \times \text{BW}_{\text{eff}}, \text{Fs}) \times 2^{\text{ENOB}}} = \frac{E_{\text{conversion}}}{(2 \times \text{BW}_{\text{eff}}, \text{Fs}) \times 2^{\text{ENOB}}}$$

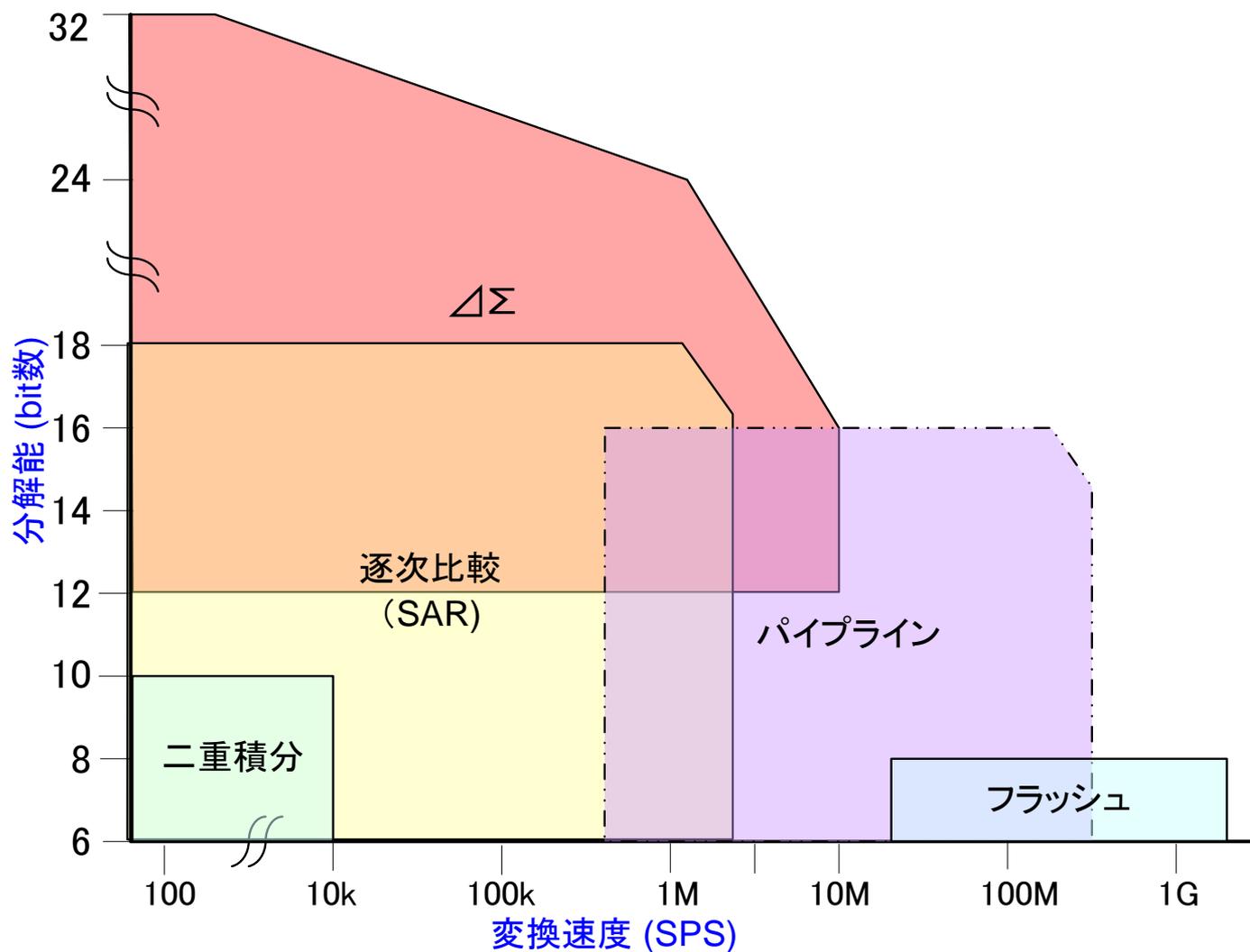
Power: 消費電力, BW<sub>eff</sub>: 実効帯域幅,

Fs: サンプリング周波数, ENOB: 有効ビット

E<sub>conversion</sub>: AD変換ステップあたりの消費エネルギー

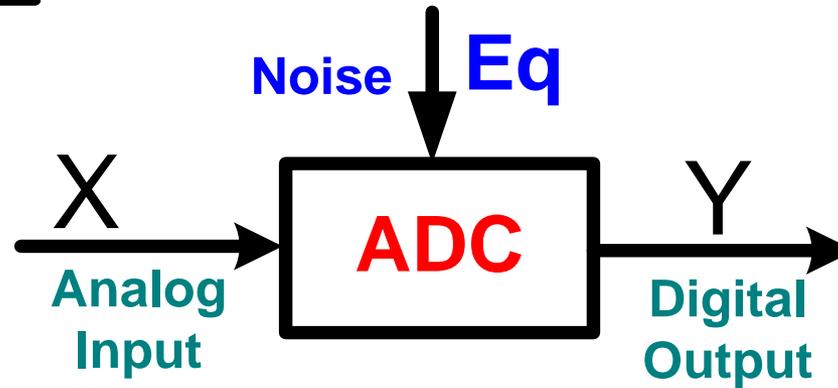
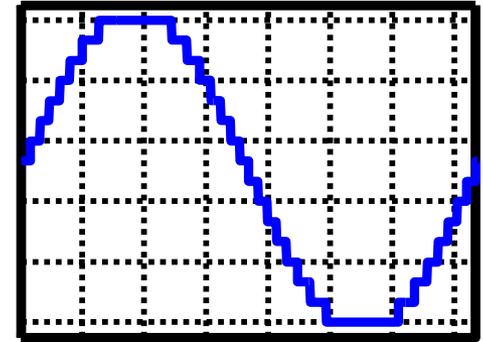
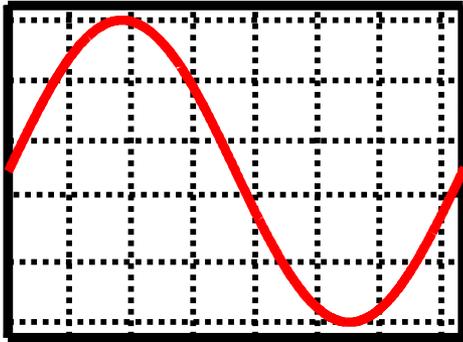
AD変換のエネルギー効率の指標、ISSCCの競争が激しい

# AD変換方式と分解能/変換速度



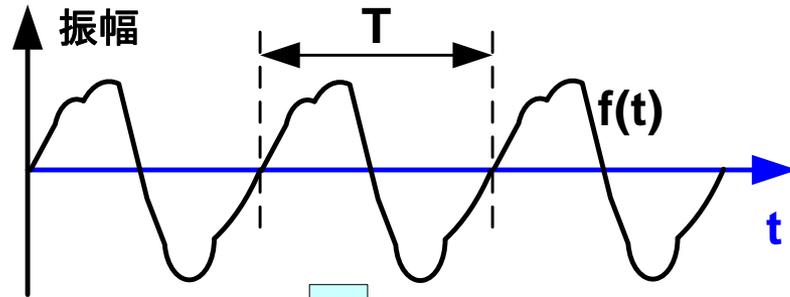
# AD変換の量子化誤差とSNR

# ADCのモデル

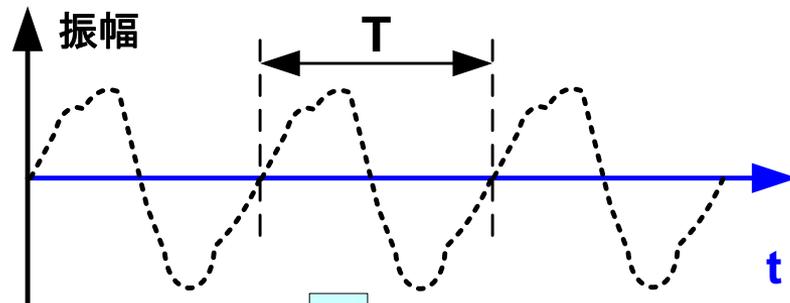


$$Y = X + E_q$$

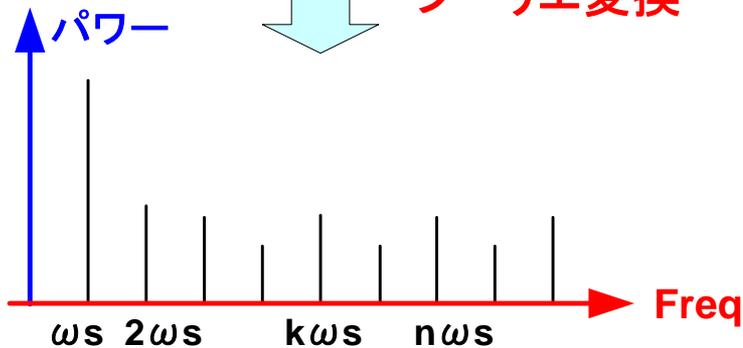
# アナログ信号のスペクトル解析



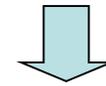
↓ サンプルング



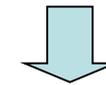
↓ フーリエ変換



- 繰返し信号は正弦波と余弦波の積和



- 離散時系列データ

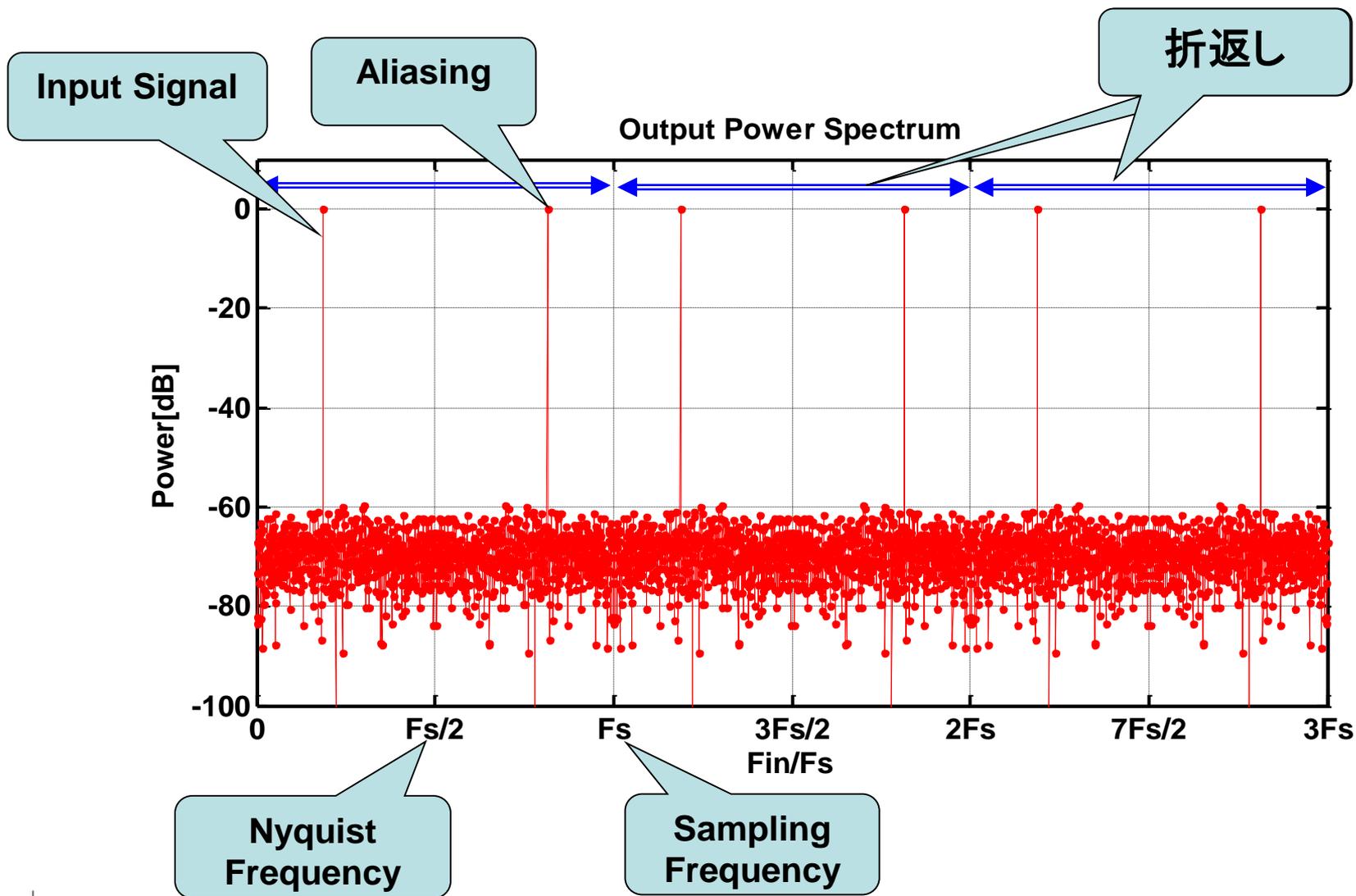


- 連続信号のスペクトル

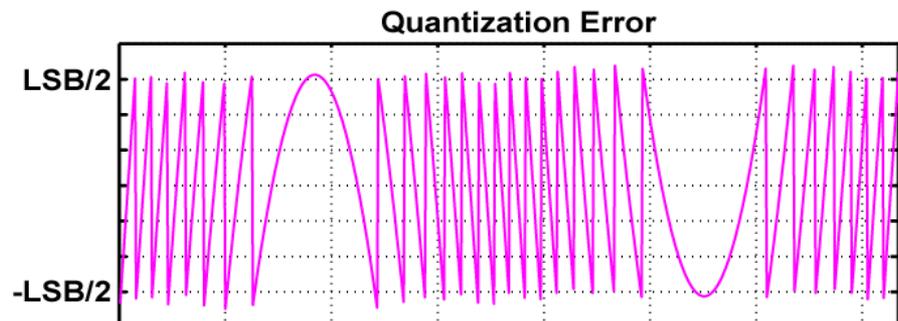
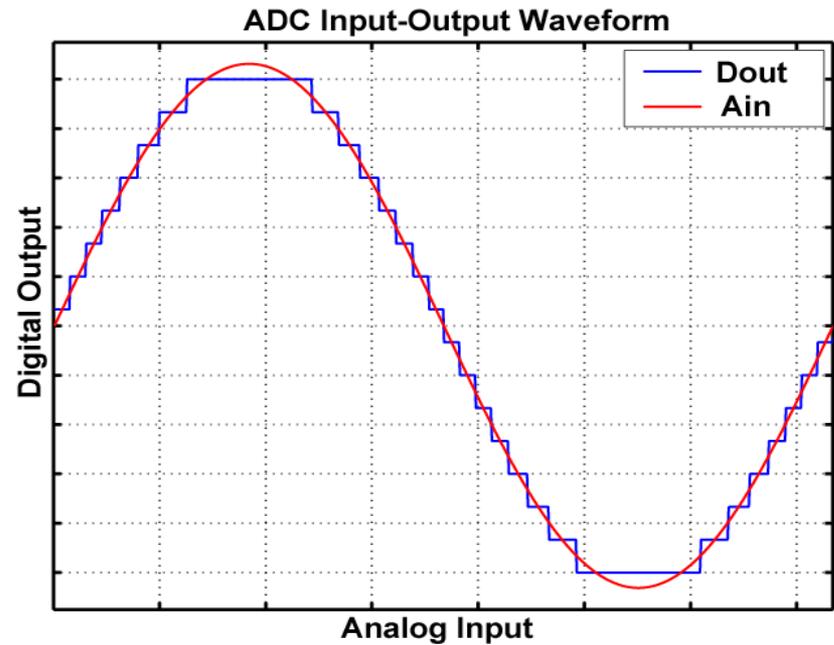
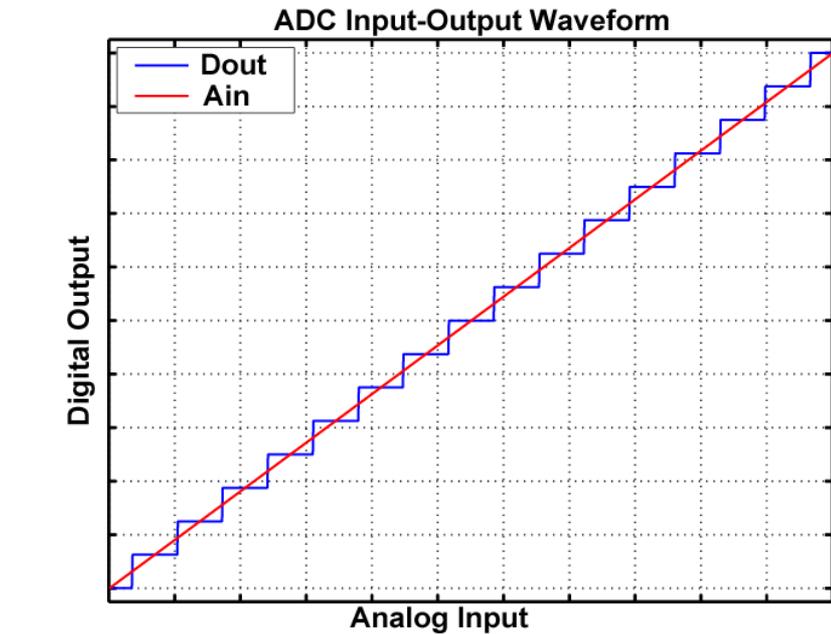


- 周波数成分解析  
信号とノイズの分離  
フィルタリング etc.

# 正弦波入力時ADC出力カスペクトル



# AD変換の量子化誤差

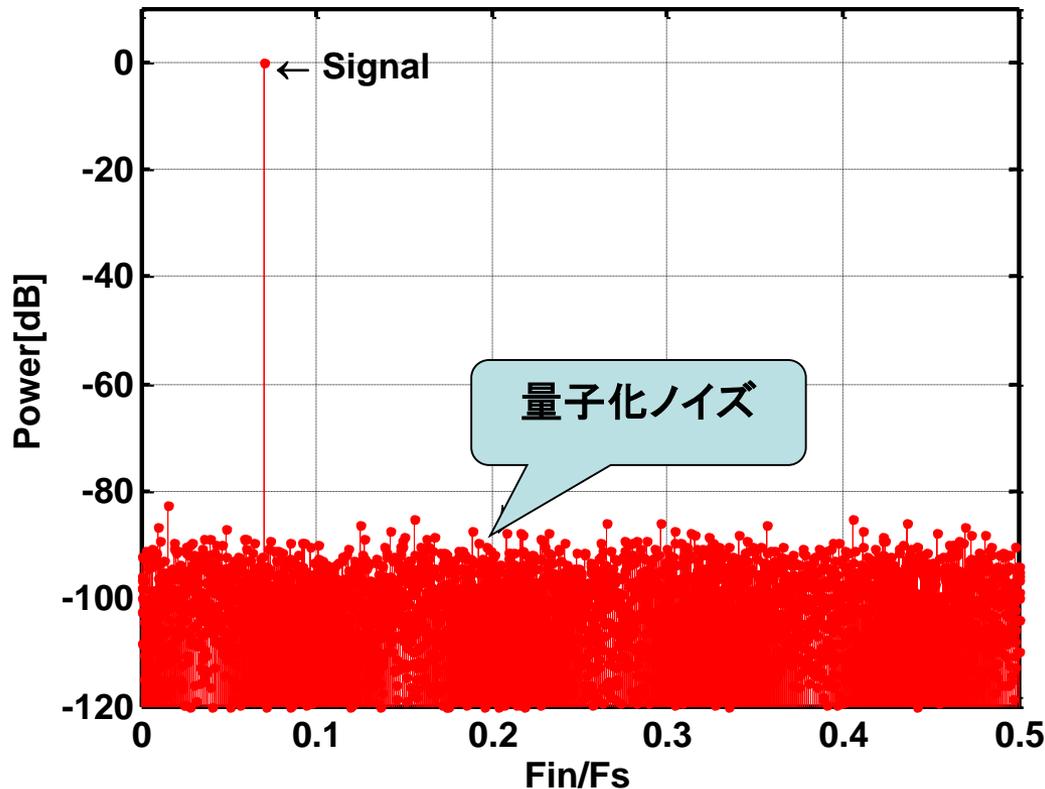


量子化誤差はAD変換における本質の誤差、  
小さくするにはBit数(分解能)をあげるしかない

# AD変換器のSNR

## Signal-to-Noise Ratio

Output Power Spectrum



ADCのパワースペクトラム  
(Doutに対し、FFT処理で得られる)

SNR [dB]

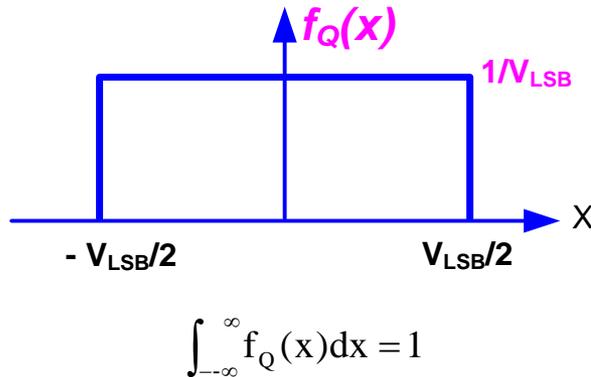
$$= 10 \cdot \log \left[ \frac{\text{Signal Power}}{\text{Noise Power}} \right]$$

$$= 10 \cdot \log \frac{V_{\text{Signal(rms)}}^2}{V_{\text{Noise(rms)}}^2}$$

$$= 20 \cdot \log \frac{V_{\text{Signal(rms)}}}{V_{\text{Noise(rms)}}}$$

# 量子化誤差とSNR

Probability density function  
for quantization error



量子化ノイズのパワー

$$\begin{aligned} V_{Q(\text{rms})} &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_Q(x) dx \right]^{1/2} \\ &= \left[ \frac{1}{V_{\text{LSB}}} \int_{-\frac{V_{\text{LSB}}}{2}}^{\frac{V_{\text{LSB}}}{2}} x^2 dx \right]^{1/2} = \frac{V_{\text{LSB}}}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

入力信号のパワー

$$V_{\text{Sin}(\text{rms})} = \frac{V_{\text{Asin}}}{\sqrt{2}} = \frac{2^N \cdot V_{\text{LSB}} / 2}{\sqrt{2}} = \frac{2^N \cdot V_{\text{LSB}}}{2\sqrt{2}}$$

理論値

$$\text{SNR [dB]} = 20 \cdot \log \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2^N \right) = 6.02N + 1.76 \text{ [dB]}$$

N: ADCのbit数

# ADCの有効ビット

(ENOB: Effective Number of Bit)

ADCのbit数	SNR [dB]
6	37.9
8	49.9
10	62.0
12	74.0
14	86.0
16	98.1
18	110.1

$$\text{SNR}[\text{dB}] = 6.02N + 1.76 [\text{dB}]$$

$$\text{ENOB} = (\text{SNR} - 1.76) / 6.02$$

SNRの6dB向上



ADCの1bitの精度向上

# AD変換器大分類

## (1) ナイキストADC

- ナイキスト定理に基づき、AD変換を行なう
- 入力アナログ信号の帯域(最大 $F_{in}$ )の2倍の周波数(ナイキスト周波数)でサンプリングすれば、元のアナログ信号を正確に再現できる。
- 入力アナログ信号と出力デジタルデータが1:1に対応。
- 前の入力サンプルに関係なく、各サンプルが独立に処理を行なう。
- 変換器にメモリ機能はない。
- 直線性や精度はアナログ回路素子(抵抗、容量、電流源)のマッチング精度で決まる。

変換速度 = サンプリングレート

# AD変換器大分類

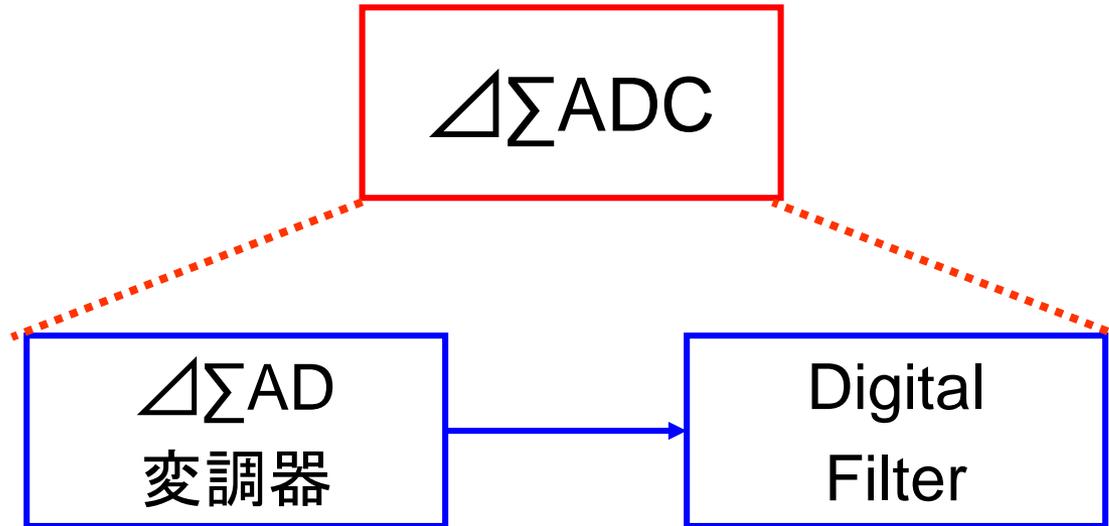
## (2) オーバーサンプリングADC( $\Delta\Sigma$ ADC)

- ナイキストレートより大幅に高い周波数で(4-512倍程度)で信号をサンプルし、先行データを用いて、最終結果を再生
- 変換器の中にメモリ機能を持つ
- 入力アナログ信号と出力デジタルデータの間は1:1の対応ではなく、時間領域また周波数領域における入力波形全体と出力波形の全体の比較が変換器の精度を決める。
- 精度は正弦波入力に対するSNRで評価できる。
- アナログ回路素子に対する要求精度はナイキストレートADCより緩和される。

変換速度 = データレイト < サンプリングレート

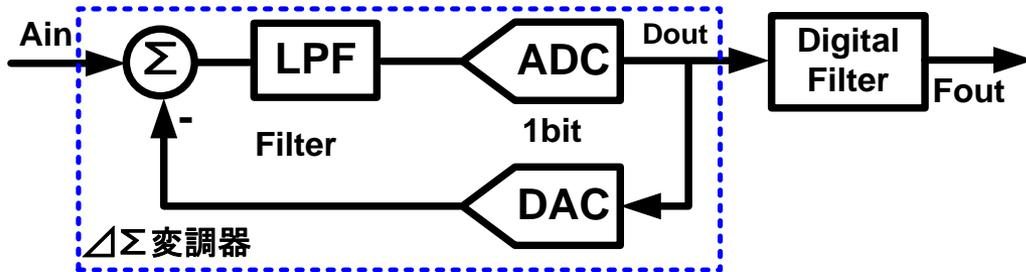
# $\Delta\Sigma$ ADCの導入

# $\Delta\Sigma$ ADC(1)



AD変調器の出力はビットストリームであり、デジタルフィルタで信号処理を行い、最終的なデジタル信号を出力する。

# $\Delta\Sigma$ ADC(2)

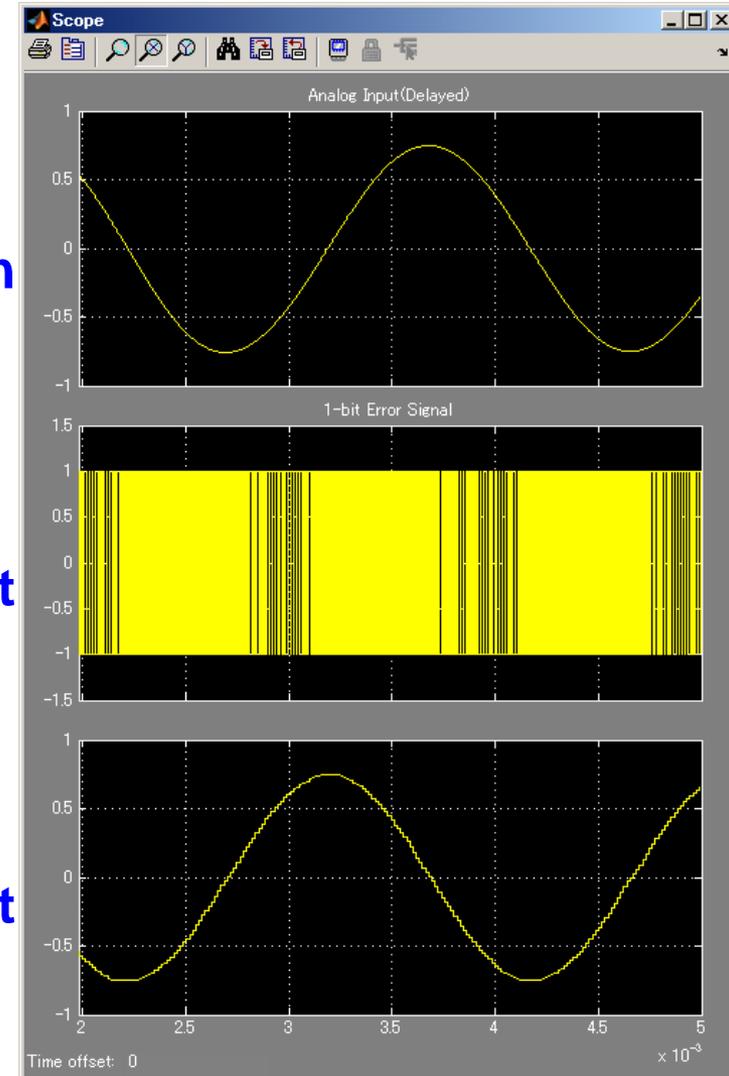


- $\Delta\Sigma$ 変調器  
オーバーサンプリングとノイズシェープで、  
入力の正弦波に $\Delta\Sigma$ 変調をかける。
- デジタル・フィルタ  
 $\Delta\Sigma$ 変調波形から高周波成分を取り除いて、  
平坦化された正弦波を得る。  
但し、デジタルフィルタによる遅延が入る

Ain

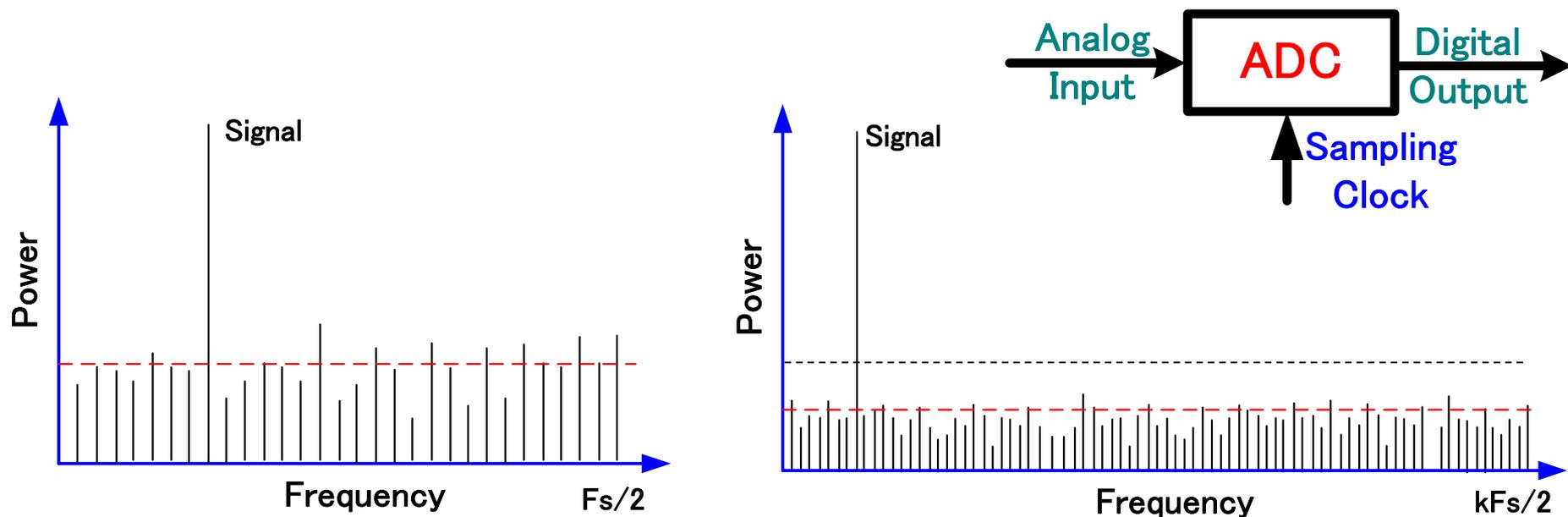
Dout

Fout



# オーバーサンプリング

# オーバーサンプリングによるSNR改善



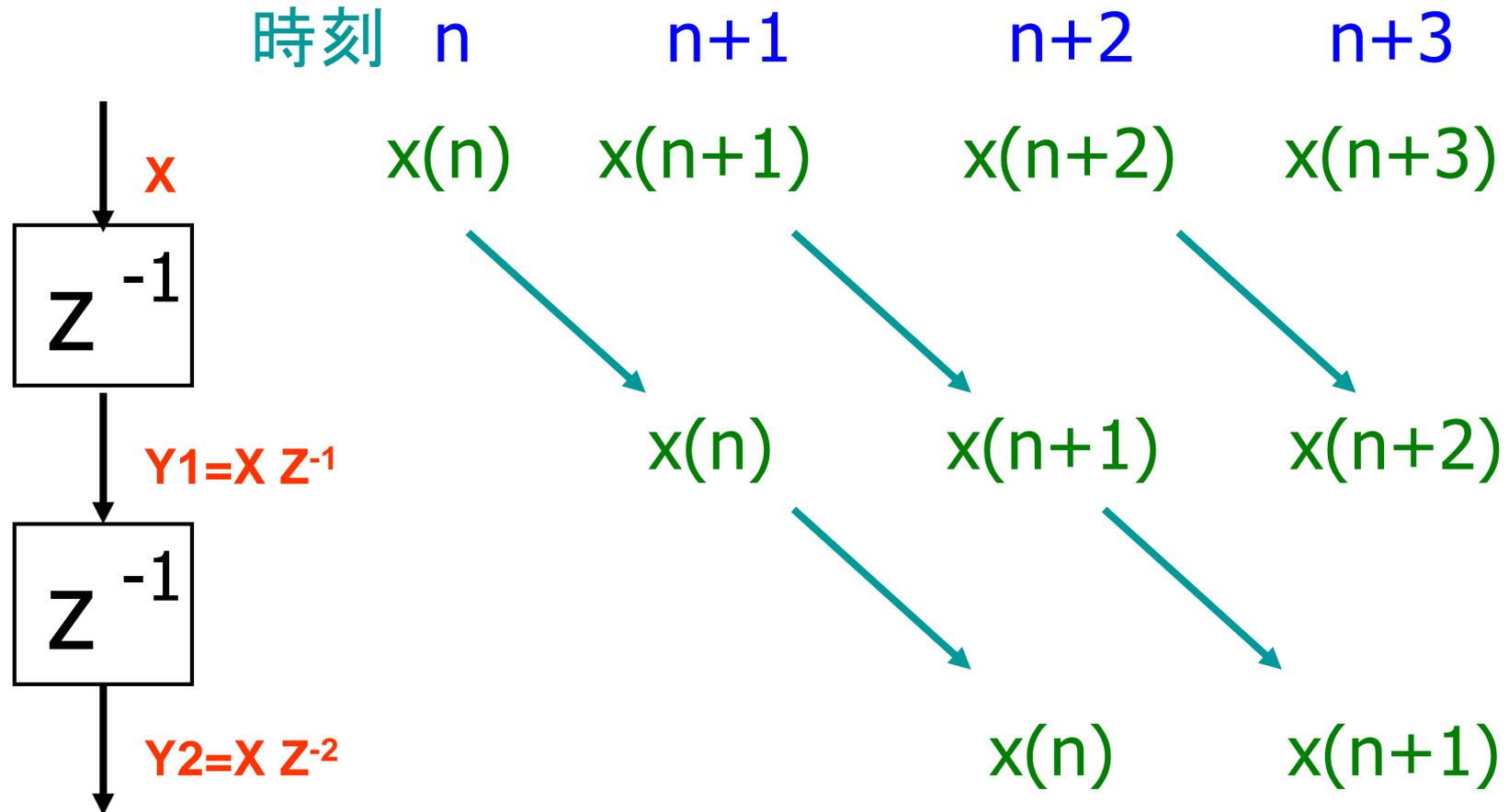
$$OSR = f_s / 2BW$$

$$SNR = 6.02N + 1.76 + 10 \log(OSR)$$

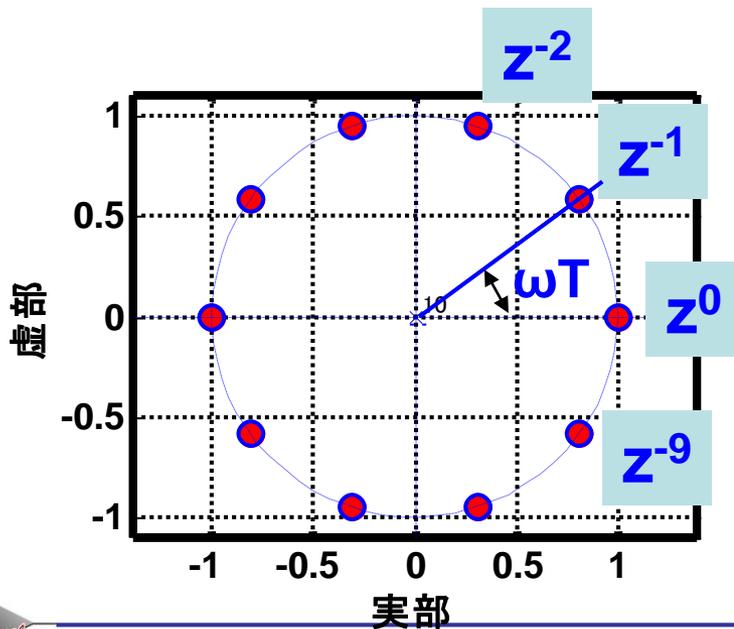
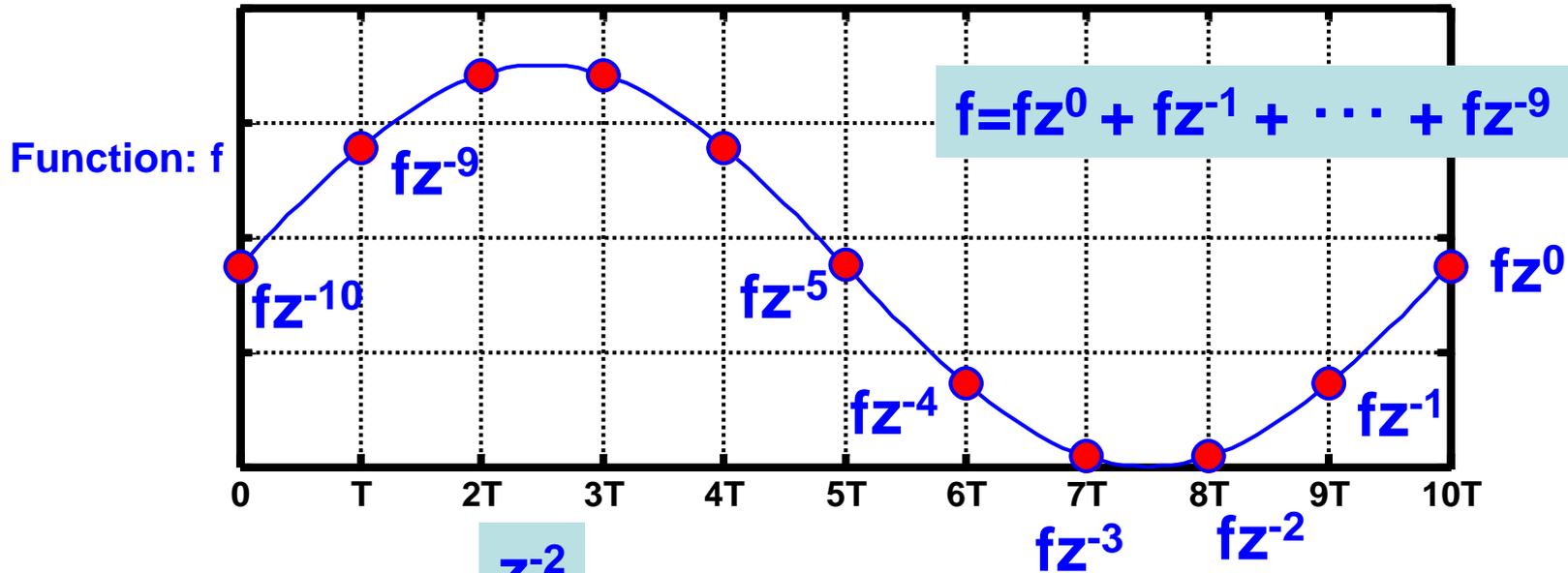
サンプリング周波数を2倍(OSR=2)、SNRは3dB向上

⇒ サンプリング周波数を4倍で1bit精度向上

# AD変換のためのz関数

シフト演算子 $z^{-1}$  (遅延)

# AD変換のためのz関数



10サンプリングで $2\pi$ の位相変化

$$z^{-1} = e^{-j\omega T}$$

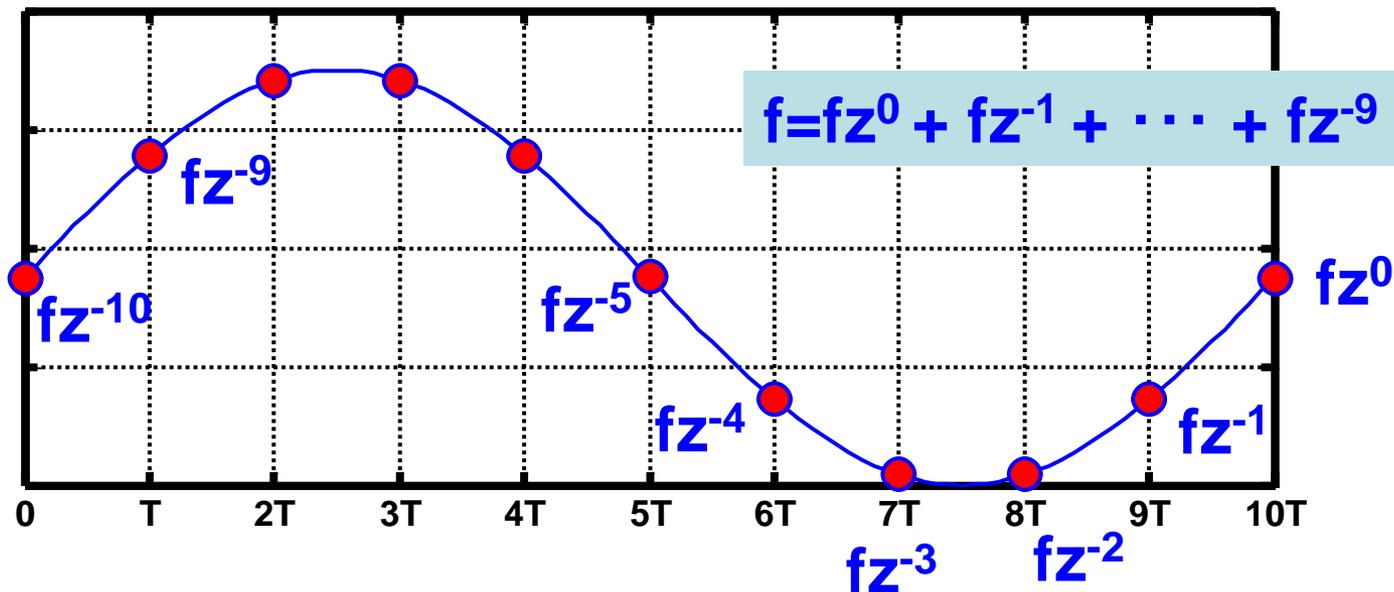
$$= \cos(2\pi f/fs) - j\sin(2\pi f/fs)$$

$$z^0 = 1,$$

$f$ : 信号の周波数

$fs$ : サンプリング周波数

# z関数で表す微分・積分



$$\text{微分: } df/dt = f(t) - f(t-T) = fz^0 - fz^{-1} = f(1-z^{-1})$$

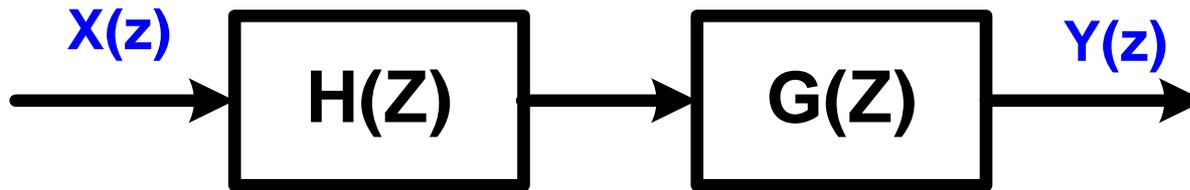
$$\text{微分項: } (1-z^{-1})$$

$$\text{積分: } \sum f(t) = f(z^0 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n})$$

$$Y = f + Yz^{-1} \Rightarrow Y = f/(1-z^{-1})$$

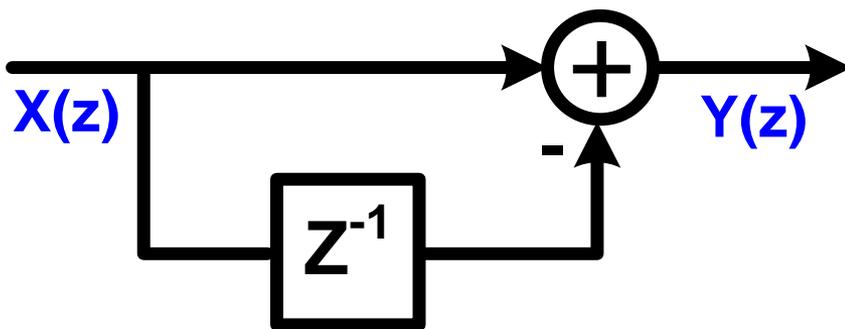
$$\text{微分項: } 1/(1-z^{-1})$$

# z関数を用いる伝達関数(1)



$$Y(z) = H(z) \cdot G(z) \cdot X(z)$$

## 微分(HPF)



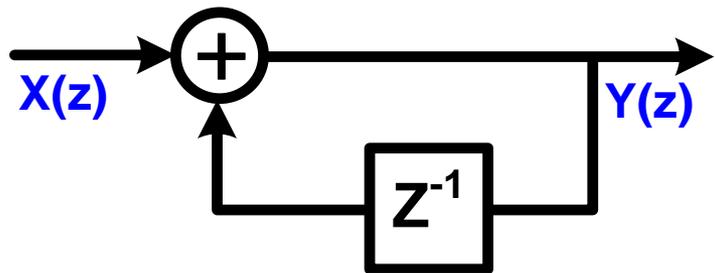
$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) = (1 - z^{-1})X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-1}$$

# z関数を用いる伝達関数(2)

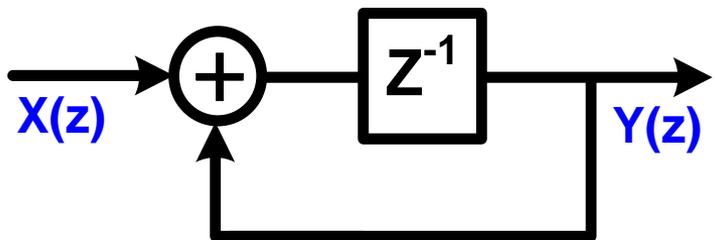
## 積分(LPF)



$$Y(z) = X(z) + z^{-1}Y(z)$$

$$(1 - z^{-1})Y(z) = X(z)$$

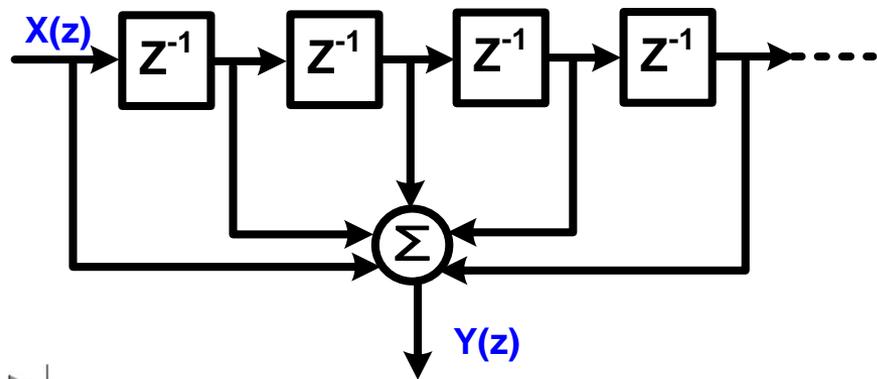
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$



$$Y(z) = z^{-1}(X(z) + Y(z))$$

$$(1 - z^{-1})Y(z) = z^{-1}X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$



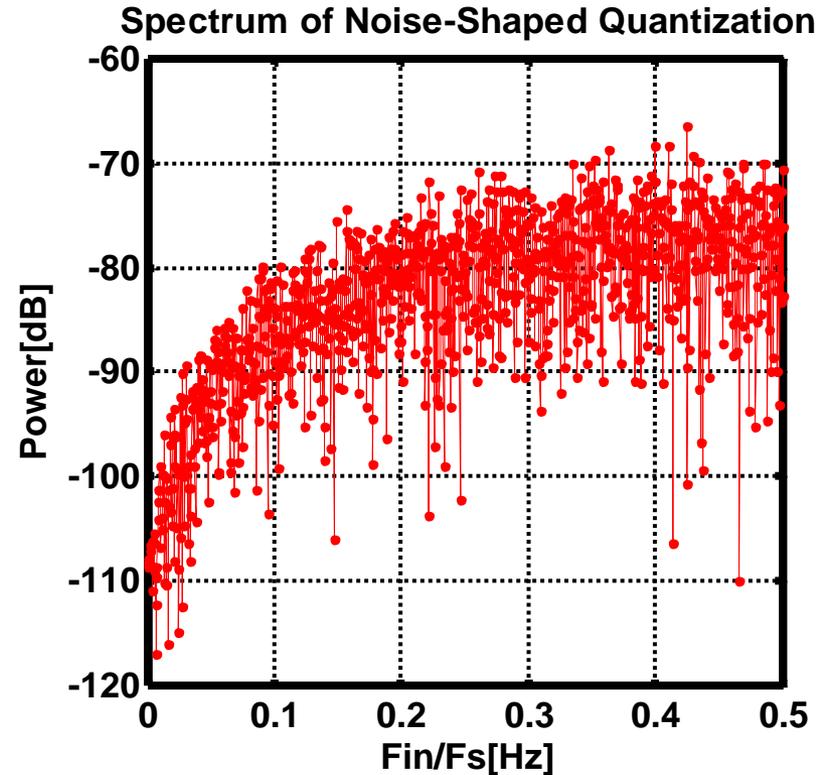
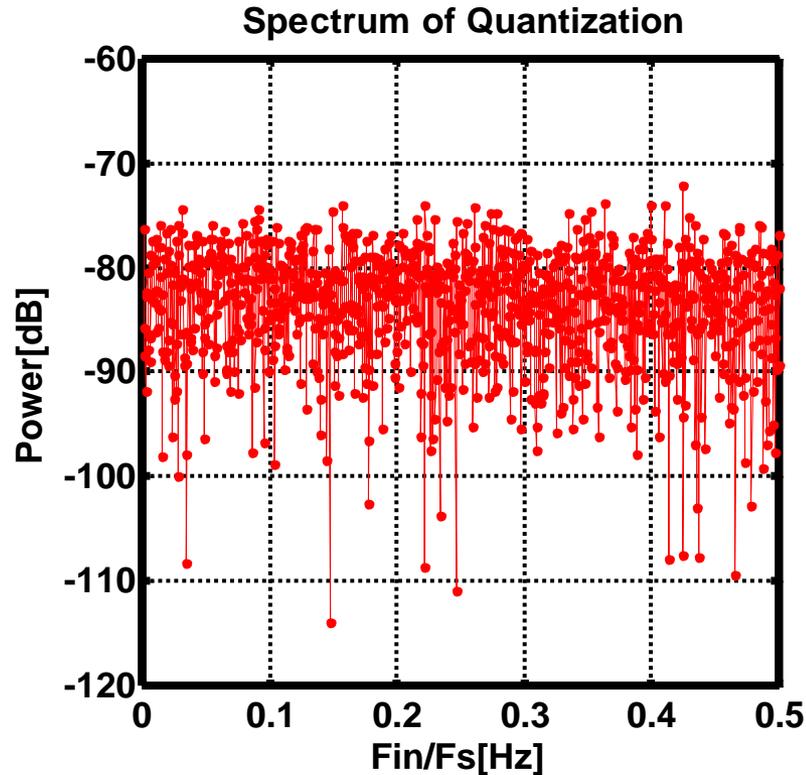
$$Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + z^{-3}X(z) + \dots$$

$$Y(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots)X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$$

# ノイズシェーピング

# ノイズシェーピング(Noise-Shaping)

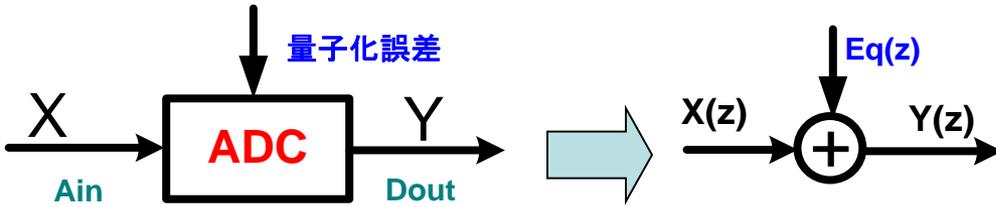


$E_q$ (量子化ノイズ)のスペクトル

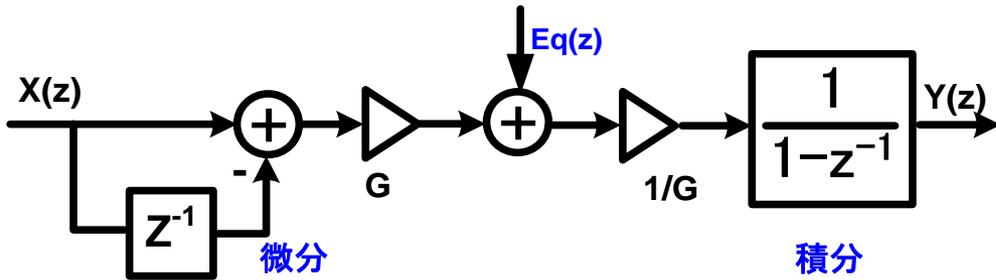
$E_q^*(1-z^{-1})$ のスペクトル

# $\Delta\Sigma$ 変調方式

# △変調方式(1)



$$Y(z) = X(z) + Eq(z)$$



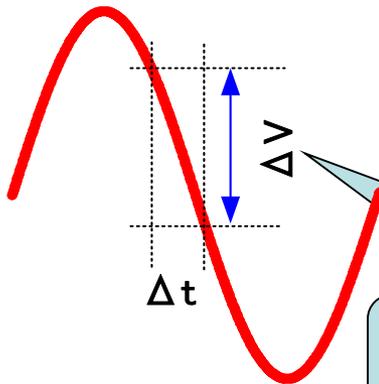
$$Y(z) = X(z) + Eq(z)/G$$

量子化誤差は1/Gで減衰

$$d(\sin(2\pi F_{in}/F_s))/dt = (2\pi F_{in}/F_s) \cdot \cos(2\pi F_{in}/F_s)$$

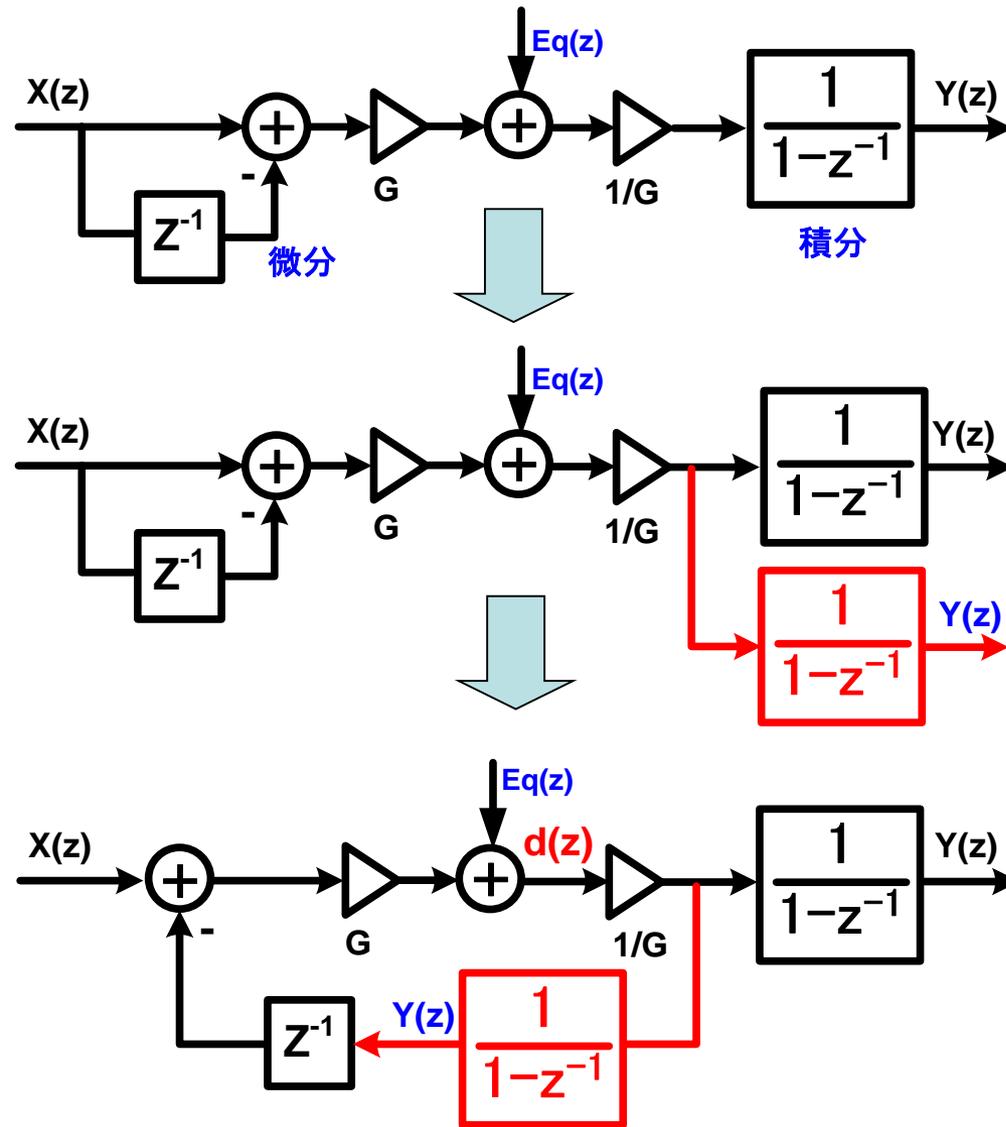
$$F_s \gg F_{in} \Rightarrow 2\pi F_{in}/F_s \ll 1$$

$$(2\pi F_{in}/F_s) \times G \doteq 1 \text{ を設定可能}$$



オーバーサンプリングを行うと  
信号の差分は小さくなる

# △変調方式(2)



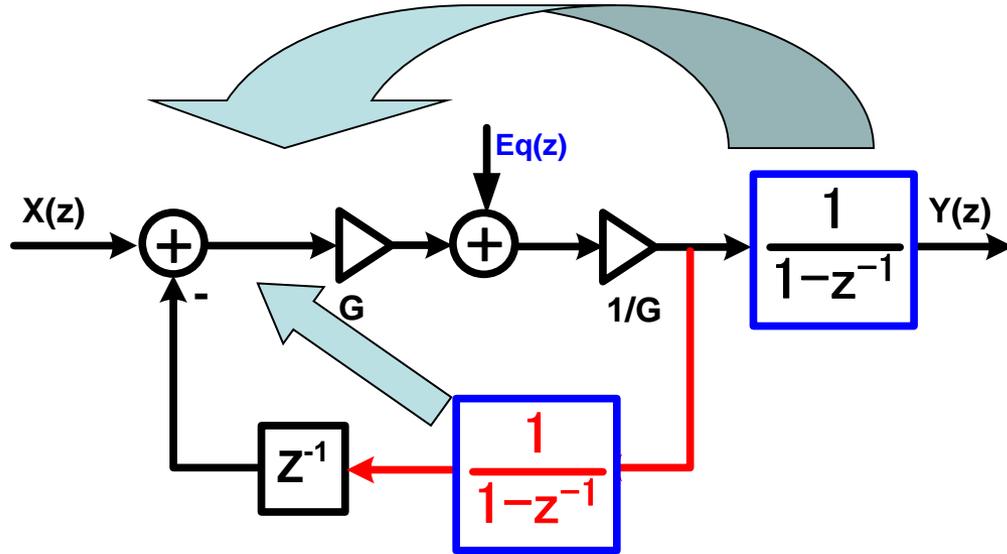
$$d(z) = \left( X(z) - \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{G} \cdot d(z) \right) \cdot G + E_q(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{G} \cdot d(z)$$

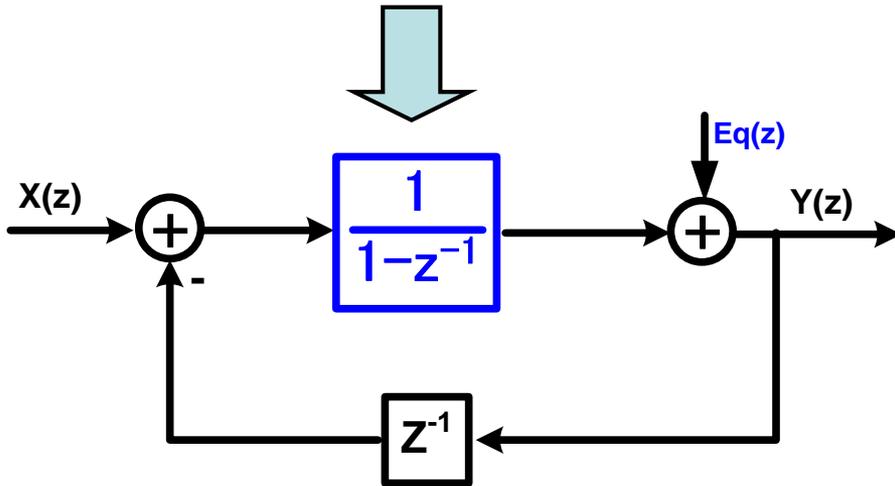
$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{G} \cdot E_q(z)$$

量子化誤差は1/Gで減衰

# △Σ変調方式



$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{G} \cdot E_q(z)$$

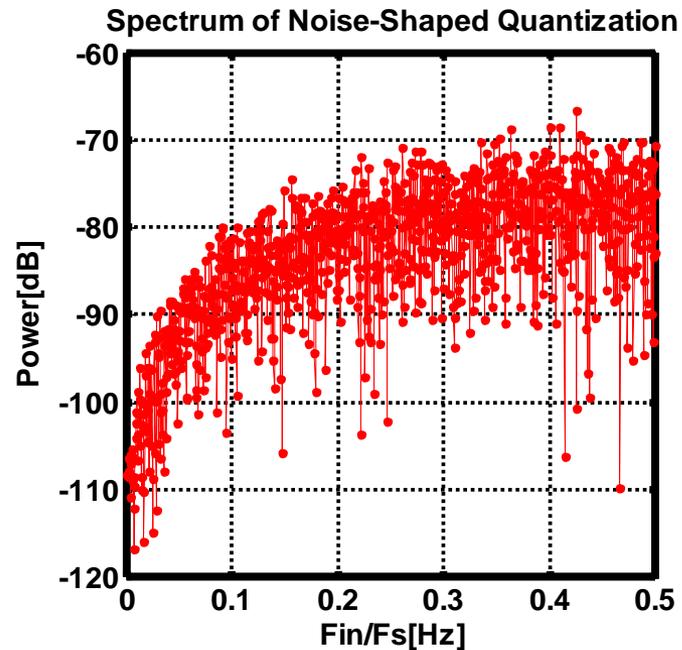
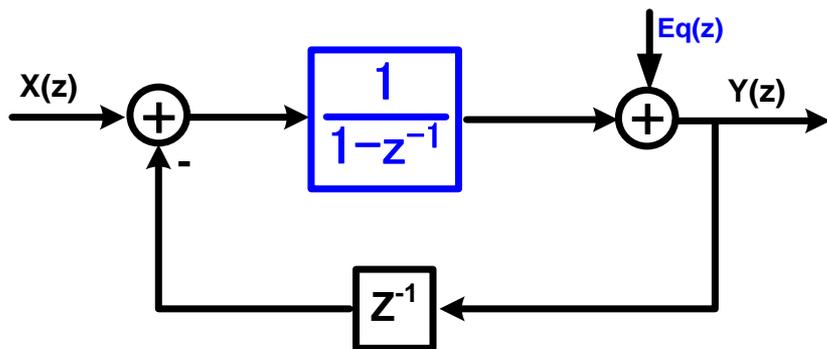


$$Y(z) = (X(z) - Y(z)z^{-1}) \frac{1}{1-z^{-1}} + E_q(z)$$

$$Y(z) = X(z) + (1-z^{-1}) \cdot E_q(z)$$

量子化誤差は微分される  
ノイズシェーピング

# ノイズシェーピングの特徴



$$Y(z) = X(z) + \underline{\underline{(1 - z^{-1}) \cdot Eq(z)}}$$

周波数成分を持つ項

ノイズ・シェープで量子化誤差の周波数分布を変える